40 επαναληπτικά θέματα

για τα μαθηματικά κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου

Σχολικό έτος 2013 – 2014

Ελεύθερη διάθεση για εκπαιδευτικούς σκοπούς

ΣΥΛΛΟΓΗ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα 1ο.

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $0<\alpha<\beta$ τέτοια, ώστε για τους μιγαδικούς $z_1=\alpha+if(\alpha)$ και $z_2=\beta+if(\beta)$ να ισχύει $w=\dfrac{z_1}{z_2}\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι $|z_1+iz_2|=|z_1-iz_2|$

β. Να αποδείξετε ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ στο διάστημα $[\alpha,\beta]$

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων

δ. Αν ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to\alpha}\int_{\alpha}^{x}\dfrac{f(x+\alpha-t)}{(x-\alpha)(x+\alpha-t)}dt=1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=1$ έχει λύση στο (α,β)

Λύση:

α. $w\in\mathbb{R}\Leftrightarrow w=\overline{w}\Leftrightarrow\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}\Leftrightarrow z_1\overline{z}_2=\overline{z}_1z_2\Leftrightarrow(\alpha+if(\alpha))(\beta-if(\beta))=(\alpha-if(\alpha))(\beta+if(\beta))\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\alpha f(\beta)=\beta f(\alpha)$

Ακόμα:

$|z_1+iz_2|=|z_1-iz_2|\Leftrightarrow|\alpha+if(\alpha)+i(\beta+if(\beta))|=|\alpha+if(\alpha)-i(\beta+if(\beta))|\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow|\alpha+if(\alpha)+i\beta-f(\beta)|=|\alpha+if(\alpha)-i\beta+f(\beta)|\Leftrightarrow$

$|(\alpha-f(\beta))+i(f(\alpha)+\beta)|=|(f(\beta)+\alpha)+i(f(\alpha)-\beta)|\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\sqrt{(\alpha-f(\beta))^2+(f(\alpha)+\beta)^2}=\sqrt{(f(\beta)+\alpha)^2+(f(\alpha)-\beta)^2}\Leftrightarrow$

$(\alpha-f(\beta))^2+(f(\alpha)+\beta)^2=(f(\beta)+\alpha)^2+(f(\alpha)-\beta)^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow-2\alpha f(\beta)+2\beta f(\alpha)=2\alpha f(\beta)-2\beta f(\alpha)\Leftrightarrow\alpha f(\beta)=\beta f(\alpha)$

Επομένως $|z_1+iz_2|=|z_1-iz_2|$.

β. Η $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$, $x\in[\alpha,\beta]$, $0<\alpha<\beta$, είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, παραγωγίσιμη στο $x\in(\alpha,\beta)$ και $g(\alpha)=\dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$ ενώ $g(\beta)=\dfrac{f(\beta)}{\beta}$.

Όμως $\alpha f(\beta)=\beta f(\alpha) \overset{0<\alpha<\beta}{\Leftrightarrow} \frac{f(\alpha)}{\alpha}=\frac{f(\beta)}{\beta} \Leftrightarrow g(\alpha)=g(\beta)$. Συνεπώς η g ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος *Rolle* στο $[\alpha,\beta]$.

γ. Έχουμε ότι $g'(x)=\left(\frac{f(x)}{x}\right)'=\frac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$. Από το ερώτημα **β.** θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=0 \Leftrightarrow \frac{\xi f'(\xi)-f(\xi)}{\xi^2}=0 \Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{f(\xi)}{\xi}$, $\xi\in(\alpha,\beta)$.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο ξ είναι η:

$$y-f(\xi)=f'(\xi)(x-\xi) \Leftrightarrow y-f(\xi)=\frac{f(\xi)}{\xi}(x-\xi) \Leftrightarrow y=\frac{xf(\xi)}{\xi}$$

Επειδή οι συντεταγμένες του $O(0,0)$ επαληθεύουν την εξίσωση της εφαπτομένης, έχουμε ότι υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

δ. Θέτω $x+\alpha-t=u$, έχουμε $dt=-du$. Για $t=\alpha \Rightarrow u=x$ ενώ για $t=x \Rightarrow u=\alpha$.

Επομένως $\int_\alpha^x \frac{f(x+\alpha-t)}{(x-\alpha)(x+\alpha-t)}dt=\int_x^\alpha -\frac{f(u)}{(x-\alpha)u}du=\int_\alpha^x \frac{f(u)}{(x-\alpha)u}du=\frac{1}{(x-\alpha)}\int_\alpha^x \frac{f(u)}{u}du$.

Συνεπώς έχουμε ότι

$$\lim_{x\to\alpha}\int_\alpha^x \frac{f(x+\alpha-t)}{(x-\alpha)(x+\alpha-t)}dt=\lim_{x\to\alpha}\frac{1}{(x-\alpha)}\int_\alpha^x \frac{f(u)}{u}du=\lim_{x\to\alpha}\frac{\int_\alpha^x g(u)du}{(x-\alpha)} \overset{\text{DLH}}{\underset{x\to\alpha}{=}} \lim g(x)=g(\alpha) \quad .$$

Συνεπώς $g(\alpha)=1 \Leftrightarrow \frac{f(\alpha)}{\alpha}=1 \Leftrightarrow f(\alpha)=\alpha$.

Οπότε $\beta f(\alpha)=\alpha f(\beta) \Leftrightarrow f(\beta)=\beta$.

Θεωρώ $h(x)=f(x)-x$, $x\in[\alpha,\beta]$.

Η h συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και $h(\alpha)=f(\alpha)-\alpha=0$, $h(\beta)=f(\beta)-\beta=0$.

Συνεπώς από θεώρημα *Rolle*, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε:

$h'(x_0)=0 \Leftrightarrow f'(x_0)-1=0 \Leftrightarrow f'(x_0)=1$. Επομένως η εξίσωση $f'(x)=1$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (α,β).

Θέμα 2ο.

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\int_0^x \frac{4}{1+f^2(t)}dt$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

β. Να δείξετε ότι η C_f έχει ένα σημείο καμπής του οποίου να βρείτε τις συντεταγμένες.

γ. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f, $C_{f^{-1}}$

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_f, $C_{f^{-1}}$

Λύση:

α. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε και η $\frac{4}{1+f^2(t)}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Άρα το $\int_0^x \frac{4}{1+f^2(t)}dt$ παραγωγίσιμο στο $\mathbb{R}$,συνεπώς η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\frac{4}{1+f^2(x)}$.

Έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $\frac{4}{1+f^2(x)}>0$, οπότε έχουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει $f'(x)>0$.

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και "$1-1$", οπότε αντιστρέφεται.

Επίσης $f(0)=0$, άρα η $x=0$ μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x)=0$.

Επίσης για $x<0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x)<f(0)\Rightarrow f(x)<0$.

Ενώ για $x>0 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x)>f(0)\Rightarrow f(x)>0$.

Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, οπότε και η $\frac{4}{1+f^2(t)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Άρα η f' είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)=-\frac{8f(x)f'(x)}{\left(1+f^2(x)\right)^2}$.

β. $f''(x)=0\Leftrightarrow -\frac{8f(x)f'(x)}{\left(1+f^2(x)\right)^2}=0 \overset{f'(x)>0}{\Leftrightarrow} f(x)=0 \overset{1-1}{\Leftrightarrow} x=0$

$f''(x)>0\Leftrightarrow -\frac{8f(x)f'(x)}{\left(1+f^2(x)\right)^2}>0 \overset{f'(x)>0}{\Leftrightarrow} -8f(x)>0\Leftrightarrow x<0$

Επομένως η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και κοίλη στο $[0,+\infty)$. Παρουσιάζει στο σημείο $M(0,f(0))=(0,0)$ σημείο καμπής.

γ. $f'(x)=\dfrac{4}{1+f^2(x)} \Leftrightarrow f'(x)+f'(x)f^2(x)=4 \Rightarrow \left(f(x)+\dfrac{1}{3}f^3(x)\right)=(4x)' \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x)+\dfrac{1}{3}f^3(x)=4x+c$

Για $x=0$ έχουμε $f(0)+\dfrac{1}{3}f^3(0)=4\cdot 0+c \overset{f(0)=0}{\Leftrightarrow} c=0$. Οπότε $f(x)+\dfrac{1}{3}f^3(x)=4x$.

Γνωρίζουμε ότι αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, τότε οι εξισώσεις $f(x)=x$ και $f^{-1}(x)=f(x)$ είναι ισοδύναμες. (Η απόδειξη βρίσκεται στην Σελ. 76 – Τόμος Α' «Εισαγωγή στην Θεωρία Συναρτήσεων – Νικολάου Ε. Καντιδάκη»).

Έτσι:

$f(x)=x \Leftrightarrow f(x)+\dfrac{1}{3}f^3(x)=x+\dfrac{1}{3}x^3 \Leftrightarrow 4x=x+\dfrac{1}{3}x^3 \Leftrightarrow 12x=3x+x^3 \Leftrightarrow x^3-9x=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x-3)(x+3)=0$

Άρα $x=0$ ή $x=3$ ή $x=-3$. Οπότε τα κοινά σημεία των $C_f, C_{f^{-1}}$ είναι τα $A(3,3)$, $O(0,0)$, $B(-3,-3)$.

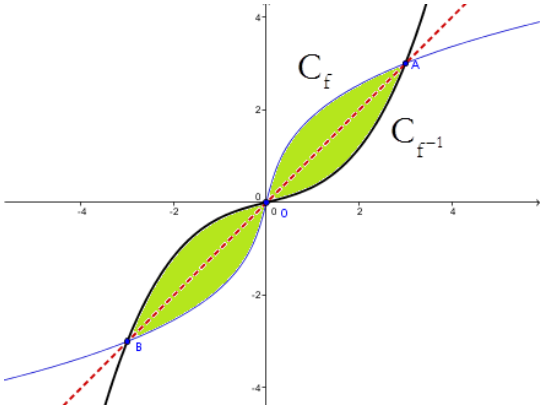
δ. Θα δείξουμε, ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, οπότε η f^{-1} θα έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Θεωρώ $g(x)=\dfrac{x}{4}+\dfrac{x^3}{12}$, $x\in\mathbb{R}$, η g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{1}{4}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η g γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε και "1−1". Έχουμε ότι η g έχει σύνολο τιμών το $\left(\lim\limits_{x\to-\infty}g(x),\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)\right)=(-\infty,+\infty)$.

Επίσης επειδή $\dfrac{f(x)}{4}+\dfrac{f^3(x)}{12}=x$, έχουμε οτι $g(f(x))=x \Leftrightarrow f(x)=g^{-1}(x)$. Επομένως η f έχει σύνολο τιμών το πεδίο ορισμού της g, δηλαδή το $\mathbb{R}$.

Έχουμε $\dfrac{f(x)}{4}+\dfrac{f^3(x)}{12}=x \Leftrightarrow \dfrac{f(f^{-1}(x))}{4}+\dfrac{f^3(f^{-1}(x))}{12}=f^{-1}(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x)=\dfrac{x}{4}+\dfrac{x^3}{12}$, $x\in\mathbb{R}$.

Προσδιορίζουμε τη σχετική θέση των $C_f, C_{f^{-1}}$. Επειδή η f κοίλη στο $[0,+\infty)$,έχουμε ότι η C_f βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y=x$ στο $[0,+\infty)$,ενώ η f^{-1} θα βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y=x$ στο $[0,+\infty)$.



Έτσι από τη συμμετρία έχουμε:

$$E = 4\int_0^3 \left| f^{-1}(x) - x \right| dx = 4\int_0^3 \left(x - f^{-1}(x) \right) dx = 4\int_0^3 \left(x - \frac{x}{4} - \frac{x^3}{12} \right) dx = 4\int_0^3 \left(\frac{3x}{4} - \frac{x^3}{12} \right) dx =$$

$$4\left[\frac{3x^2}{8} - \frac{x^4}{48} \right]_0^3 = 4\left(\frac{3^3}{8} - \frac{3^4}{48} \right) = 4\left(\frac{27}{8} - \frac{27}{16} \right) = \frac{4 \cdot 27}{16} = \frac{27}{4}$$ τετραγωνικές μονάδες.

Θέμα 3ο.

Έστω οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, οι οποίες ικανοποιούν τις σχέσεις:

- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ **(1)**
- $g^2(x)=g'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ **(2)**
- $f(1)=2$
- $g(1)=-1$

α. Να βρείτε τις συναρτήσεις f και g

β. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες με $x=1$ και $x=2$

γ. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)\right)^{-\frac{1}{g(x)}}$

δ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{2e^{x-1}}{f'(x)-1}+\dfrac{2\ln x+3}{g'(x)+1}=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(1,e)$.

(Θέμα ΕΜΕ 2012)

Λύση:

α. Η συνάρτηση $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πηλίκο παραγωγισίμων, οπότε η σχέση **(1)** ισοδύναμα γράφεται: $\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}=\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ **(3)**.

Από τη σχέση **(2)** προκύπτει ότι $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, οπότε:

$$g^2(x)=g'(x)\Leftrightarrow\frac{g'(x)}{g^2(x)}=1\Leftrightarrow\left(-\frac{1}{g(x)}\right)'=(x)'\Leftrightarrow-\frac{1}{g(x)}=x+c_1$$

Για $x=1$ (και αφού $g(1)=-1$): $-\dfrac{1}{g(1)}=1+c_1\Rightarrow 1=1+c_1\Rightarrow c_1=0$

Άρα: $-\dfrac{1}{g(x)}=x\Leftrightarrow g(x)=-\dfrac{1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$ **(4)**

Η σχέση **(3)** λόγω των σχέσεων **(2)** και **(4)** γράφεται:

$$f'(x)g(x)-f(x)g'(x)=f'(x)\Rightarrow f'(x)\left(-\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x^2}f(x)=f'(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(1+\frac{1}{x}\right)f'(x)=-\frac{1}{x^2}f(x) \Rightarrow \left(1+\frac{1}{x}\right)f'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)'f(x) \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)'=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f(x)}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}=c_2 \Rightarrow f(x)=c_2\left(1+\frac{1}{x}\right),\ x\in(0,+\infty)$$

Για $x=1$ (και αφού $f(1)=2$) είναι: $f(2)=c_2\left(1+\frac{1}{1}\right) \Leftrightarrow 2=2c_2 \Leftrightarrow c_2=1$

Άρα $f(x)=1+\frac{1}{x},\ x\in(0,+\infty)$.

β. Στο διάστημα $[1,2]$ ισχύει: $f(x)-g(x)=1+\frac{1}{x}-\left(-\frac{1}{x}\right)=1+\frac{2}{x}>0$, οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι $E=\int_1^2\left|f(x)-g(x)\right|dx=\int_1^2\left(f(x)-g(x)\right)dx=\int_1^2\left(1+\frac{2}{x}\right)dx=\left[x+2\ln x\right]_1^2=1+2\ln 2$ τ.μ.

γ. Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι: $f(x)=1+\frac{1}{x}$ και $g(x)=-\frac{1}{x}$ οπότε το ζητούμενο όριο λαμβάνει τη μορφή:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ και επειδή για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}$, αρκεί να υπολογίσουμε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$.

Είναι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^{0\cdot(+\infty)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\underset{\text{DLH}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=1$ οπότε

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to+\infty}e^{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\lim_{x\to+\infty}e^{x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]}=e^1=e$$

δ. Για κάθε $x\in(0,+\infty)$ είναι $f'(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$ και $g'(x)=\frac{1}{x^2}$ οπότε

$f'(x)-1=-\left(g'(x)+1\right)=-\frac{1}{x^2}-1\neq 0$ και η δοθείσα εξίσωση στο διάστημα $[1,e]$ είναι ισοδύναμη με την $2e^{x-1}-2\ln x-3=0$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=2e^{x-1}-2\ln x-3,\ x\in[1,e]$

Θα αποδείξουμε ότι η εξίσωση $h(x)=0$, έχει μια ακριβώς ρίζα στο διάστημα $(1,e)$.

- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[1,e]$, ως άθροισμα συνεχών
- $h(1)=2e^{1-1}-2\ln 1-3=2-3=-1<0$ και
  $h(e)=2e^{e-1}-2\ln e-3=2e^{e-1}-5=2\left(e^{e-1}-\frac{5}{2}\right)>0$ διότι $e>\frac{5}{2}$ και $e-1>1$. Οπότε
  $h(1)\cdot h(e)<0$.

Άρα η συνάρτηση h ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του *Θεωρήματος Bolzano*, οπότε η εξίσωση $h(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,e)$.

Για κάθε $x\in(1,e)$ έχουμε:

$h'(x)=\left(2e^{x-1}-2\ln x-3\right)'\Rightarrow h'(x)=2\left(e^{x-1}-\frac{1}{x}\right)>0$ αφού για $1<x<e$ είναι:

$$\begin{cases} x-1>0 \\ \frac{1}{x}<1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} e^{x-1}>1 \\ -\frac{1}{x}>-1 \end{cases}\overset{(+)}{\Rightarrow}e^{x-1}-\frac{1}{x}>0$$

Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα, οπότε η εξίσωση $h(x)=0$ θα έχει μια ακριβώς ρίζα στο διάστημα $(1,e)$

Θέμα 4ο.

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

- $2\sigma\upsilon\nu x+\int_0^x tf(t)dt=\int_0^x\left(\int_0^u f(t)dt\right)du-x\eta\mu x+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ **(1)**
- $f(0)=0$ **(2)**
- $f'(0)=\alpha$ **(3)**

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α.

β. Να αποδείξετε ότι $f(x)=1-\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\mathbb{R}$

γ. Να βρείτε:

i. Την εξίσωση της εφαπτομένης **(ε)** της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $\frac{2\pi}{3}$

ii. Το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, από την εφαπτομένη **(ε)** της C_f και τις ευθείες με εξισώσεις $x=\frac{2\pi}{3}$ και $x=\frac{4\pi}{3}$

(Θέμα ΕΜΕ 2012)

Λύση:

α. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα η συνάρτηση $g(u)=\int_0^u f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε η $\int_0^x g(u)du=\int_0^x\left(\int_0^u f(t)dt\right)du$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Η συνάρτηση $tf(t)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και η συνάρτηση $\int_0^x tf(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Επίσης οι συναρτήσεις $2\sigma\upsilon\nu x$ και $-x\eta\mu x+2$ είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$.

Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της σχέσης **(1)** έχουμε:

$$(2\sigma\upsilon\nu x)'+\left(\int_0^x tf(t)dt\right)'=\left(\int_0^x\left(\int_0^u f(t)dt\right)du\right)'-(x\eta\mu x)'+(2)'\Rightarrow$$

$$-2\eta\mu x+xf(x)=\int_0^x f(t)dt-\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x\Rightarrow xf(x)=\int_0^x f(t)dt+\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x,\ x\in\mathbb{R}\ .\ \textbf{(4)}$$

Από τη σχέση **(4)** για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ έχουμε: $f(x)=\frac{\int_0^x f(t)dt+\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x}{x}$ **(5)**.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$, γιατί ο τύπος της f προκύπτει από πράξεις μεταξύ παραγωγίσιμων συναρτήσεων σε καθένα από αυτά τα διαστήματα.

Από τη σχέση **(3)** έχουμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και στο $x_0=0$, οπότε είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

Προσδιορισμός του πραγματικού αριθμού α:

Για $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ έχουμε:

$$\alpha=f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\overset{f(0)=0}{=}\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\quad\textbf{(6)}$$

Είναι: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{\int_0^x f(t)dt+\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\int_0^x f(t)dt+\eta\mu x-x\sigma\upsilon\nu x}{x^2}\overset{\text{DLH}}{=}$

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)+\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)+x\eta\mu x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{2x}+\lim_{x\to0}\frac{x\eta\mu x}{2x}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}+\lim_{x\to0}\eta\mu x\right)=\frac{1}{2}\alpha\text{, οπότε, λόγω της σχέσης }\textbf{(6)}\text{ είναι: }\alpha=\frac{1}{2}\alpha\Leftrightarrow\frac{1}{2}\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=0\ .$$

β) Παραγωγίζοντας και τα δύο μέλη της σχέσης **(4)** έχουμε:

$$\left(xf(x)\right)'=\left(\int_0^x f(t)dt\right)'+\left(\eta\mu x\right)'-\left(x\sigma\upsilon\nu x\right)'\Rightarrow f(x)+xf'(x)=f(x)+\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu x+x\eta\mu x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow xf'(x)=x\eta\mu x,\ x\in\mathbb{R}\,.$$

Σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ έχουμε: $f'(x)=\eta\mu x=\left(-\sigma\upsilon\nu x\right)'$ οπότε:

$f(x)=\begin{cases}-\sigma\upsilon\nu x+c_1,\ x<0\\-\sigma\upsilon\nu x+c_2,\ x>0\end{cases}$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα είναι συνεχής και στο $x_0=0$, οπότε έχουμε: $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=f(0)\Rightarrow$

$$\lim_{x\to0^-}\left(-\sigma\upsilon\nu x+c_1\right)=\lim_{x\to0^+}\left(-\sigma\upsilon\nu x+c_2\right)=0\Rightarrow-\sigma\upsilon\nu0+c_1=-\sigma\upsilon\nu0+c_2=0\Rightarrow c_1=c_2=1$$

Επομένως: $f(x)=\begin{cases}-\sigma\upsilon\nu x+1,\ x<0\\0,\ x=0\\-\sigma\upsilon\nu x+1,\ x>0\end{cases}\Rightarrow f(x)=1-\sigma\upsilon\nu x\,,\ x\in\mathbb{R}$

γ. i. Είναι:

- $f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=1-\sigma\upsilon\nu\dfrac{2\pi}{3}=1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$
- $f'\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=\eta\mu\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης **(ε)** της C_f στο σημείο της με τετμημένη $\dfrac{2\pi}{3}$ είναι:

$$\varepsilon:y-\frac{3}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)\Rightarrow y=\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}-\frac{\pi\sqrt{3}}{3}$$

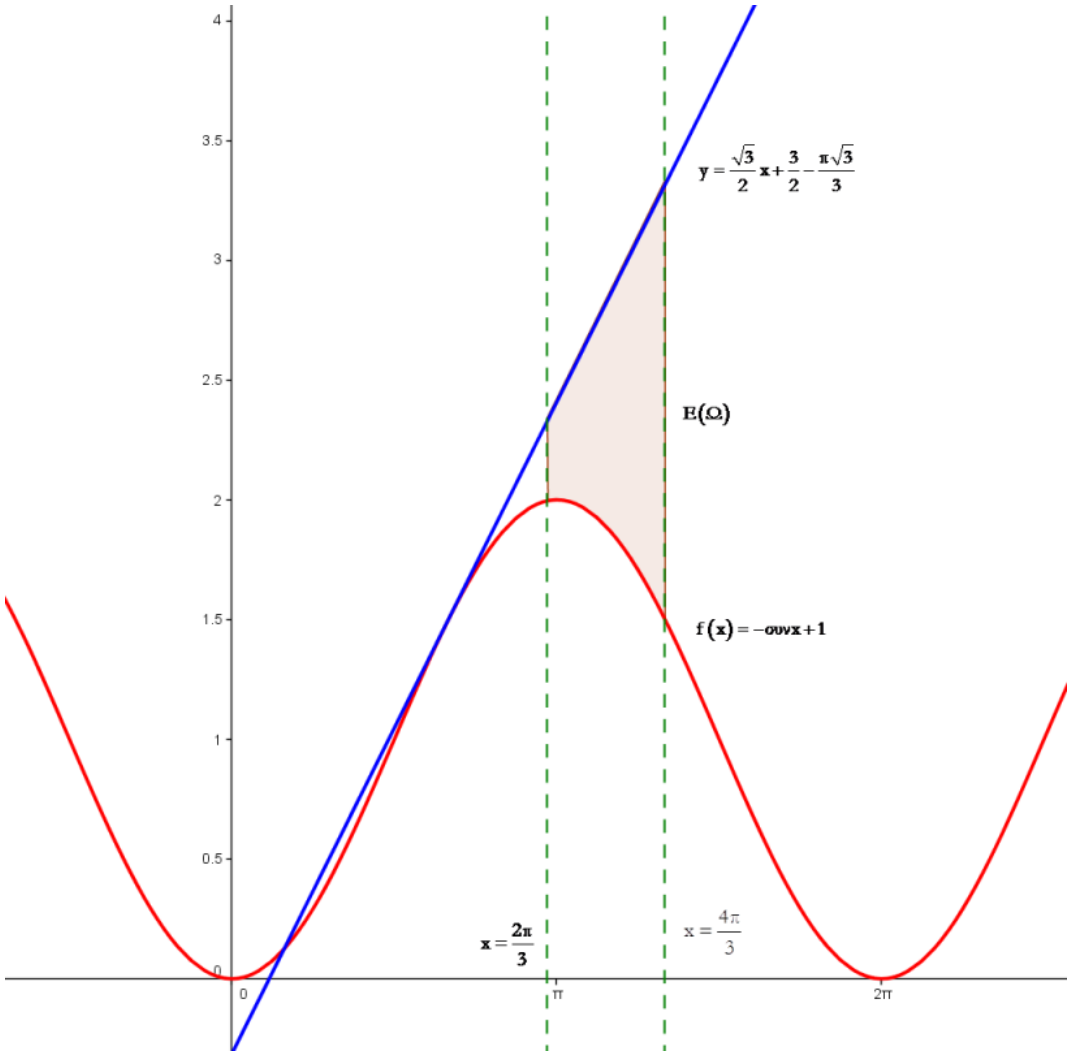
ii. Στο διάστημα $\left[\frac{2\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right]$ η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, με $f'(x)=\eta\mu x$ και $f''(x)=\sigma\upsilon\nu x<0$, οπότε η συνάρτηση f είναι κοίλη στο διάστημα αυτό.

Επομένως η εφαπτομένη **(ε)** της C_f στο σημείο της με τετμημένη $\frac{2\pi}{3}$, βρίσκεται πάνω από την C_f. Επομένως το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f, από την εφαπτομένη **(ε)** της C_f και τις ευθείες με εξισώσεις $x=\frac{2\pi}{3}$ και $x=\frac{4\pi}{3}$ είναι:

$$E=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}\left|\varepsilon(x)-f(x)\right|dx=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}\left(\varepsilon(x)-f(x)\right)dx=\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{3}{2}-\frac{\pi\sqrt{3}}{3}-1+\sigma\upsilon\nu x\right)dx=$$

$$\left[\eta\mu x\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}+\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{x^2}{2}+\frac{3x}{2}-\frac{\pi\sqrt{3}}{3}x-x\right]_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}}=\eta\mu\frac{4\pi}{3}-\eta\mu\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{16\pi^2}{9}-\frac{4\pi^2}{9}\right)+\frac{3-2\sqrt{3}\pi}{6}\cdot\frac{2\pi}{3}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}\pi^2}{9}+\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\ \tau.\mu$$



Θέμα 5ο.

Έστω η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f[1,2]\to\mathbb{R}$ για την οποία δίνονται $f''(x)<0$ για κάθε $x\in[1,2]$ και $f(1)=0$, $f(2)=2$, $f'(2)=1$.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=x$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0)<-1$.

δ. Να αποδείξετε ότι :

i. $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}>\dfrac{f(2)-f(x)}{2-x}$ για κάθε $x\in(1,2)$.

ii. $f(x)\geq 2(x-1)$ για κάθε $x\in(1,2)$.

iii. $\int_1^2 f(x)dx\geq 1$.

ε. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $ex+y=2$ τέμνει ακριβώς σε ένα μόνο σημείο την γραφική παράσταση της f.

στ. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\epsilon(1,2)$ με $\xi_1<\xi_2$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=f'(\xi_1)+2$.

(Θέμα 128 Συλλογής)

Λύση:

α. Έχουμε $f''(x)<0$ για κάθε $x\in[1,2]$ και συνεπώς η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$ αφού επιπλέον είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη. Η f' στο $[1,2]$ παρουσιάζει ως συνεχής ελάχιστη τιμή στο $x_0=2$ και άρα $f'(x)\geq f'(2)=1>0$. Η f λοιπόν είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,2]$ με σύνολο τιμών $f([1,2])=[f(1),f(2)]=[0,2]$.

β. Η εφαπτομένη της C_f στο $(2,f(2))=(2,2)$ έχει εξίσωση $y-f(2)=f'(2)(x-2)\Rightarrow y=x$

γ. Από Θ.Μ.Τ για την f στο $[1,2]$ έχουμε ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=2$. Από Θ.Μ.Τ για την f' στο $[\xi,2]$ έχουμε ότι υπάρχει $x_0\in(\xi,2)\subset(1,2)$ τέτοιο ώστε $f''(x_o)=\dfrac{f'(2)-f'(\xi)}{2-\xi}=\dfrac{-1}{2-\xi}<-1$.

δ1. Από Θ.Μ.Τ για την f στα διαστήματα $[1,x]$ και $[x,2]$ παίρνουμε ότι υπάρχουν $\xi_1\in(1,x)$ και $\xi_2\in(x,2)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ και $f'(\xi_2)=\dfrac{f(2)-f(x)}{2-x}$. Τότε για $\xi_1<\xi_2$ παίρνουμε $\xi_1<\xi_2\Rightarrow f'(\xi_1)>f'(\xi_2)\Rightarrow\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}>\dfrac{f(2)-f(x)}{2-x}$ αφού η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,2]$.

δ2. Η σχέση $f(x)\geq 2(x-1)$ ισχύει ως ισότητα για $x=1$ και $x=2$. Για $x\in(1,2)$ από το **δ1.** έχουμε $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}>\frac{f(2)-f(x)}{2-x}\Rightarrow f(x)>2(x-1)$.

δ3. Από το **δ2.** έχουμε $f(x)\geq 2(x-1)\Rightarrow f(x)-2(x-1)\geq 0$.

Επιπλέον η $f(x)-2(x-1)$ συνεχής και συνεπώς :

$$\int_1^2\left(f(x)-2(x-1)\right)dx\geq 0\Rightarrow\int_1^2 f(x)dx\geq\int_1^2 2(x-1)dx=1$$

ε. Έστω η συνάρτηση $h(x)=2-x$.

Θεωρώ τη συνάρτηση $\varphi(x)=f(x)-h(x)=f(x)-2+x, x\in[1,2]$. Η $\varphi(x)$ συνεχής στο $[1,2]$ αφού η fσυνεχής και επιπλέον $\varphi(1)=-1<0$ και $\varphi(2)=2>0$. Από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_1)=0\Rightarrow f(x_1)-h(x_1)=0\Rightarrow f(x_1)=h(x_1)$.

Επιπλέον η $\varphi(x)$ γνησίως αύξουσα αφού $\varphi'(x)=f'(x)+1>0$.

στ. Από Θ.Μ.Τ για την f στα διαστήματα $[1,x_1]$ και $[x_1,2]$ έχουμε ότι υπάρχουν $\xi_1\in(1,x_1)$ και $\xi_2\in(x_1,2)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)=\frac{f(x_1)-f(1)}{x_1-1}=\frac{2-x_1}{x_1-1}$ και $f'(\xi_2)=\frac{f(2)-f(x_1)}{2-x_1}=\frac{x_1}{2-x_1}$. Τότε $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=\frac{2-x_1}{x_1-1}\frac{x_1}{2-x_1}=\frac{x_1}{x_1-1}$ και $f'(\xi_1)+2=\frac{2-x_1}{x_1-1}+2=\frac{x_1}{x_1-1}$.

Θέμα 6ο.

Έστω η συνάρτηση f ,συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Αν $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, συνάρτηση με $g(x)\int_0^1 f(xt)dt$, $t,x\in\mathbb{R}$ και ο μιγαδικός $z:|z-2+i|=|z+2-i|$ (1), τότε:

α. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες του μιγαδικού, ανήκουν στην ευθεία (ε) $y = 2x$.

β. Αν η ευθεία ε, είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ να βρείτε τον πραγματικό αριθμό κ ώστε να ισχύει $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{xf\left(\frac{1}{x}\right)-5x^2\eta\mu\left(\frac{1}{x}\right)+\kappa}{f\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{2}{x}+2}=10$.

γ. Να αποδείξετε ότι: $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(u)du & \text{αν } x\neq 0\\ f(0) & \text{αν } x=0\end{cases}$.

δ. Να αποδείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

ε. Αν ο μιγαδικός $z=\int_1^2 f(t)dt+i\int_0^2 f(t)dt$ ικανοποιεί την σχέση (1) να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=g(\xi)$.

(Θέμα 126 Συλλογής)

Λύση:

α. Έστω $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$.

έχουμε

$|z-2+i|=|z+2-i|\Leftrightarrow|x+yi-2+i|=|x+yi+2-i|\Leftrightarrow|(x-2)+(y+1)i|=|(x+2)+(y-1)i|\Leftrightarrow$

$\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y-1)^2}\Leftrightarrow(x-2)^2+(y+1)^2=(x+2)^2+(y-1)^2\Leftrightarrow$

$x^2-4x+4+y^2+2y+1=x^2+4x+4+y^2-2y+1\Leftrightarrow 4y=8x\Leftrightarrow y=2x$

Συνεπώς οι εικόνες του μιγαδικού, ανήκουν στην ευθεία (ε) $y = 2x$.

β. Επειδή η ευθεία (ε) $y=2x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ έχουμε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-2x)=0$.

Αρχικά έχουμε $\left|\dfrac{5\eta\mu u}{u^2}\right|\le\dfrac{1}{u^2}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{u^2}\le\dfrac{5\eta\mu u}{u^2}\le\dfrac{1}{u^2}$ και $\lim\limits_{u\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{u^2}\right)=\lim\limits_{u\to+\infty}\left(\dfrac{1}{u^2}\right)=0$.

Άρα από κριτήριο παρεμβολής έχουμε $\lim\limits_{u\to+\infty}\left(\dfrac{5\eta\mu u}{u^2}\right)=0$.

Οπότε $10=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{xf\left(\dfrac{1}{x}\right)-5x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}+\kappa}{f\left(\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{2}{x}+2}\overset{\substack{\frac{1}{x}=u\\ x\to 0^+\\ u\to+\infty}}{=}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\dfrac{f(u)}{u}-\dfrac{5\eta\mu u}{u^2}+\kappa}{f(u)-2u+2}=\dfrac{2-0+\kappa}{0+2}=\dfrac{\kappa+2}{2}$.

Άρα $\dfrac{\kappa+2}{2}=10\Leftrightarrow\kappa=18$.

γ. Έχουμε $g(x)=\int_0^1 f(xt)dt$, οπότε για $x=0$ έχουμε:

$$g(0)=\int_0^1 f(0)dt=f(0)\int_0^1 1\cdot dt=f(0)[t]_0^1=f(0)(1-0)=f(0)$$

Για $x\neq 0$ θέτουμε $xt=u$, οπότε $dt=\dfrac{du}{x}$.

Για $t=0$ έχουμε $u=0$, ενώ για $t=1$ έχουμε $u=x$.

Συνεπώς για $x\neq 0$ έχουμε $g(x)=\int_0^1 f(xt)dt=\int_0^x\dfrac{f(u)du}{x}=\dfrac{1}{x}\int_0^x f(u)du$.

Τελικά, $g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\int_0^x f(u)du & \text{αν } x\neq 0\\ f(0) & \text{αν } x=0\end{cases}$.

δ. Έχουμε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε το $\int_0^x f(u)du$ παραγωγίσιμο στο $\mathbb{R}$. Η $\dfrac{1}{x}$ παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$, άρα η g παραγωγίσιμη στο $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(u)du-xf(0)}{x^2}\overset{\text{D.H}}{\underset{x\to 0}{=}}\lim\dfrac{f(x)-f(0)}{2x}=\dfrac{f'(0)}{2}$.

Επομένως η g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x^2}\int_0^x f(u)du+\dfrac{f(x)}{x}, & x\neq 0\\ \dfrac{f'(0)}{2}, & x=0\end{cases}$.

ε. Έχουμε :

$$z=\int_1^2 f(t)dt+i\int_0^2 f(t)dt\overset{z=\alpha+2\alpha i}{\Leftrightarrow}\begin{cases}\int_1^2 f(t)dt=\alpha\\ \int_0^2 f(t)dt=2\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\int_1^2 f(t)dt=\alpha\\ \int_0^1 f(t)dt+\int_1^2 f(t)dt=2\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\int_1^2 f(t)dt=\alpha\\ \int_0^1 f(t)dt=\alpha\end{cases}.$$

Η g συνεχής στο $[1,2]$, παραγωγίσιμη στο $(1,2)$, από *Θεώρημα Μέσης Τιμής* έχουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε:

$$g'(\xi)=\frac{g(2)-g(1)}{2-1}=g(2)-g(1)=\frac{1}{2}\int_0^2 f(t)dt-\int_0^1 f(t)dt=\alpha-\alpha=0\,.$$

Δηλαδή

$$g'(\xi)=0\Leftrightarrow-\frac{1}{\xi^2}\int_0^\xi f(u)du+\frac{f(\xi)}{\xi}=0\Leftrightarrow-\frac{1}{\xi}\int_0^\xi f(u)du+f(\xi)=0\Leftrightarrow\frac{1}{\xi}\int_0^\xi f(u)du=f(\xi)\Leftrightarrow g(\xi)=f(\xi)$$

.

Θέμα 7ο.

Α. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x\cdot e^{x+1}+1,\ x\in\mathbb{R}$ και οι μιγαδικοί αριθμοί $z=x+i$ και $w=e^{x+1}-i$.

α. Να μελετηθεί η f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

β. Να βρεθεί ο $x\in\mathbb{R}$ ώστε το γινόμενο των μιγαδικών z και w να είναι φανταστικός.

Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\alpha x^3+\beta x^2-2}{x^2+1}$. Αν η C_f έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία $\varepsilon: y=(2-\alpha)x+4-\beta$, να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^*$.

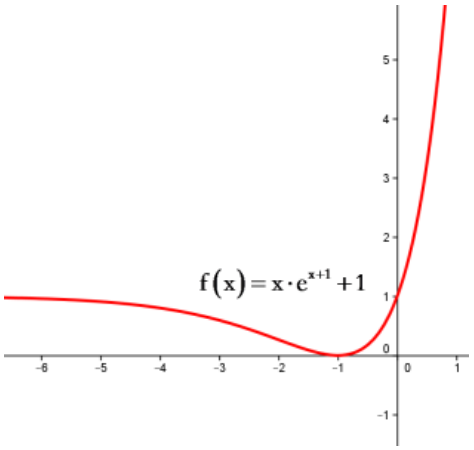
Λύση:

Α.α. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=e^{x+1}+x\cdot e^{x+1}=(x+1)\cdot e^{x+1}$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	Ο.Ε	↗	

Από τον παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,-1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[-1,+\infty)$ ενώ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x=-1$ το $f(-1)=0$. Το τοπικό ελάχιστο είναι και ολικό αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x\cdot e^{x+1}+1)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x}{\frac{1}{e^{x+1}}}\right)+1\underset{\text{DHL}}{\overset{\infty}{=}}\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{-\frac{1}{e^{x+1}}}\right)+1=1$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x\cdot e^{x+1}+1)=+\infty$.



β. $z\cdot w=(x+i)(e^{x+1}-i)=x\cdot e^{x+1}-x\cdot i+i\cdot e^{x+1}-i^2=x\cdot e^{x+1}-x\cdot i+i\cdot e^{x+1}+1=$

$= x \cdot e^{x+1} + 1 + i\left(e^{x+1} - x\right)$ άρα πρέπει $x \cdot e^{x+1} + 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$.

Β. Αν η C_f έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία $\varepsilon : y = (2-\alpha)x + 4 - \beta$ έχουμε:

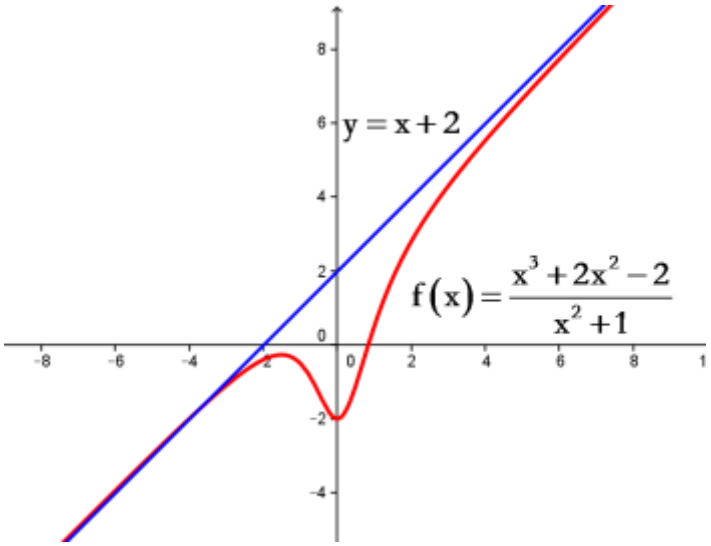
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2-\alpha$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - (2-\alpha)\cdot x\right] = 4-\beta$. Επειδή

  $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\alpha x^3 + \beta x^2 - 2}{x^3 + x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\alpha x^3}{x^3} = \alpha$ πρέπει $\alpha = 2-\alpha \Leftrightarrow \alpha = 1$ και

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - (2-\alpha)\cdot x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3 + \beta x^2 - 2}{x^2+1} - x\right) =$

  $= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3 + \beta x^2 - 2}{x^2+1} - \dfrac{x\cdot(x^2+1)}{x^2+1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\beta x^2 - x - 2}{x^2+1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\beta x^2}{x^2} = \beta$

πρέπει $\beta = 4-\beta \Leftrightarrow \beta = 2$



Θέμα 8ο.

Δίνεται μια συνάρτηση $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες

- $f''(x)-4f'(x)+4f(x)=kxe^{2x}$, $0\le x\le 2$
- $f'(0)=2f(0)$,
- $f'(2)=2f(2)+12e^4$,
- $f(1)=e^2$ όπου k ένας πραγματικός αριθμός.

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=3x^2-\dfrac{f'(x)-2f(x)}{e^{2x}}$, $0\le x\le 2$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[0,2]$.

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει $f''(\xi)+4f(\xi)=6\xi e^{2\xi}+4f'(\xi)$

γ. Να αποδείξετε ότι $k=6$ και ότι ισχύει $g(x)=0$ για κάθε $x\in[0,2]$.

δ. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x^3e^{2x}$, $0\le x\le 2$

ε. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2\dfrac{f(x)}{x^2}dx$

(Επαναληπτικές 2009)

Λύση:

α. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[0,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,2)$.

Επιπλέον $g(0)=-(f'(0)-2f(0))=0$ και

$$g(2)=12-\frac{f'(2)-2f(2)}{e^4}=12-\frac{2f(2)+12e^4-2f(2)}{e^4}=0.$$

Άρα ισχύουν οι υποθέσεις του *θεωρήματος του Rolle* για την g στο διάστημα $[0,2]$.

β. Εφαρμόζουμε το *θεώρημα του Rolle*. Υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=0$.

Όμως

$$g'(x)=6x-\frac{(f''(x)-2f'(x))e^{2x}-2e^{2x}(f'(x)-2f(x))}{e^{4x}}=$$

$$=6x-\frac{(f''(x)-2f'(x))-2(f'(x)-2f(x))}{e^{2x}}=6x-\frac{f''(x)-4f'(x)+4f(x)}{e^{2x}}$$

Συνεπώς $g'(\xi)=0\Leftrightarrow 6\xi-\dfrac{f''(\xi)-4f'(\xi)+4f(\xi)}{e^{2\xi}}=0\Leftrightarrow f''(\xi)+4f(\xi)=6\xi e^{2\xi}+4f'(\xi)$ **(1)**

γ. Αφού $\xi \in (0,2)$, από υπόθεση έχουμε $f''(\xi)-4f'(\xi)+4f(\xi)=\kappa\xi e^{2\xi}$ **(2)**

Από τις σχέσεις **(1)** και **(2)** προκύπτει $\kappa=6$, επομένως $f''(x)-4f'(x)+4f(x)=6xe^{2x}$, οπότε $g'(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=c$ και επειδή $g(0)=0$,

θα είναι $g(x)=0$, για κάθε $x\in[0,2]$.

δ. Είναι $g(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)-2f(x)=3x^2e^{2x} \Leftrightarrow e^{-2x}f'(x)-2e^{-2x}f(x)=3x^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(e^{-2x}f(x)\right)'=\left(x^3\right)' \Leftrightarrow e^{-2x}f(x)=x^3+c$$

Για $x=1$ βρίσκουμε $c=0$, άρα $f(x)=x^3e^{2x}$.

ε. Έχουμε

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2}dx=\int_1^2 \frac{x^3e^{2x}}{x^2}dx=\int_1^2 xe^{2x}dx=\frac{1}{2}\int_1^2 x\left(e^{2x}\right)'dx=$$

$$=\frac{1}{2}\left[xe^{2x}\right]_1^2-\frac{1}{4}\left[e^{2x}\right]_1^2=\frac{1}{4}\left(3e^4-e^2\right)$$

Θέμα 9ο.

Δίνεται ο μιγαδικός $z = e^x + (x-1)i$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Im}(z)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιος ώστε ο αριθμός $w = z^2 + z + 2i$ να είναι πραγματικός.

γ) Να βρείτε το μιγαδικό z του οποίου το μέτρο να γίνεται ελάχιστο.

(ΟΕΦΕ 2005)

Λύση:

α. $\mathrm{Re}(z) > \mathrm{Im}(z) \Leftrightarrow e^x > x-1 \Leftrightarrow e^x - x + 1 > 0$

Έστω $f(x) = e^x - x + 1$. Τότε $f'(x) = e^x - 1$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	ΟΕ	↗	

Η f για $x = 0$ παρουσιάζει ελάχιστο το $f(0) = e^0 - 0 + 1 = 2$. Άρα $f(x) \geq f(0) = 2 > 0$ δηλαδή $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β. $w = \left[e^x + (x-1)i\right]^2 + e^x + (x-1)i + 2i =$

$= e^{2x} + 2i(x-1)\cdot e^x - (x-1)^2 + e^x + (x-1)i + 2i =$

$= e^{2x} + e^x - (x-1)^2 + i\left[2(x-1)e^x + x + 1\right]$

Έστω $g(x) = 2(x-1)e^x + x + 1$, $x \in [0,1]$. Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ με:

$g(0) = 2(0-1)e^0 + 0 + 1 = -1 < 0$

$g(1) = 2(1-1)e^1 + 1 + 1 = 2 > 0$

Άρα $g(0)g(1) < 0$. Σύμφωνα με το *θεώρημα Bolzano* υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιος ώστε $g(x_0) = 0$ που σημαίνει ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιος ώστε ο w να είναι πραγματικός.

γ. $|z| = \sqrt{e^{2x} + (x-1)^2}$ το οποίο γίνεται ελάχιστο όταν η συνάρτηση $h(x) = e^{2x} + (x-1)^2$ έχει ελάχιστο διότι η συνάρτηση $F(x) = \sqrt{x}$ είναι γνησίως αύξουσα.

$h'(x)=2e^{2x}+2(x-1)$. Προφανής λύση είναι η $x=0$ διότι $h'(0)=2e^{0}+2(0-1)=2-2=0$. Είναι $h''(x)=4e^{2x}+2>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η $h'(x)$ είναι γνησίως αύξουσα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+		+
$f'(x)$	↗	- 0 +	↗
$f(x)$	↘	Ο.Ε	↗

Για κάθε $x<0$ ισχύει $h'(x)<h'(0)=0$ και για κάθε $x>0$ ισχύει $h'(x)>h'(0)=0$. Επομένως η $h(x)$ έχει ελάχιστο στο $x_0=0$.

Συνεπώς ο μιγαδικός $z=e^{0}+(0-1)i=1-i$ έχει το μικρότερο μέτρο.

Θέμα 10ο.

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις: $f(x)\neq x$,

$$f(x)-x=3+\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt$$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο $f'(x)=\dfrac{f(x)}{f(x)-x}$, $x\in\mathbb{R}$

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=(f(x))^2-2xf(x), x\in\mathbb{R}$, είναι σταθερή.

γ. Να αποδείξετε ότι $f(x)=x+\sqrt{x^2+9},\ x\in\mathbb{R}$

δ. Να αποδείξετε ότι $\int_x^{x+1} f(t)dt<\int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$, $x\in\mathbb{R}$.

(Πανελλαδικές 2010)

Λύση:

α. Έχουμε $f(x)=x+3+\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt$, $x\in\mathbb{R}$. Η συνάρτηση $\frac{t}{f(t)-t}$, $t\in\mathbb{R}$, είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων οπότε η $\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt$, $x\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη.

Έτσι, η συνάρτηση $f(x)=x+3+\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt$, $x\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$f'(x)=1+0+\frac{x}{f(x)-x}=\frac{f(x)}{f(x)-x},\ x\in\mathbb{R}.$$

β. Η συνάρτηση $g(x)=(f(x))^2-2xf(x)$, $x\in\mathbb{R}$, είναι παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο:

$$g'(x)=\left((f(x))^2\right)'-\left(2xf(x)\right)'=2f(x)f'(x)-2f(x)-2xf'(x)=$$

$$=2f'(x)\left(f(x)-x\right)-2f(x)=0$$

Για το τελευταίο $=$ χρησιμοποιήσαμε την ισότητα του **α.**

Άρα η συνάρτηση g είναι σταθερή.

Ακόμα είναι $g(0)=(f(0))^2-2\cdot 0\cdot f(0)=3^2=9$ και έτσι $g(x)=9$, $x\in\mathbb{R}$.

γ. Από το **β.** έχουμε: $g(x)=(f(x))^2-2xf(x)=9$, $x\in\mathbb{R}$. Άρα

$\left(f\left(x\right)\right)^2-2xf\left(x\right)+x^2=x^2+9\Leftrightarrow\left(\left(f(x)\right)-x\right)^2=x^2+9\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\left|f\left(x\right)-x\right|=\sqrt{x^2+9}\,,\ x\in\mathbb{R}\,.$

Είναι $f\left(x\right)-x\neq0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η συνάρτηση $f\left(x\right)-x$ είναι συνεχής οπότε διατηρεί σταθερό πρόσημο και εφόσον $f\left(0\right)-0=3>0$ θα είναι $f\left(x\right)-x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα $f\left(x\right)-x=\sqrt{x^2+9}\Leftrightarrow f\left(x\right)=x+\sqrt{x^2+9}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

δ. 1ος τρόπος : Θεωρούμε τη συνάρτηση $F\left(u\right)=\int_0^u f\left(t\right)dt\,,\ u\in\mathbb{R}$, η οποία είναι παραγωγίσιμη με

$F'\left(u\right)=f\left(u\right)$ και $F''\left(u\right)=f'\left(u\right)=1+\dfrac{u}{\sqrt{u^2+9}}=\dfrac{\sqrt{u^2+9}+u}{\sqrt{u^2+9}}>0\ ,\ u\in\mathbb{R}$ **(1)**

Έτσι η F' είναι γνησίως αύξουσα.

Από *Θεώρημα Μέσης Τιμής* υπάρχει $x_1\in\left(x,x+1\right)$ τέτοιο ώστε:

$.\,F'\left(x_1\right)=\dfrac{F\left(x+1\right)-F\left(x\right)}{x+1-x}=F\left(x+1\right)-F\left(x\right),\ x\in\mathbb{R}\,.$ **(2)**

Ακόμα από *Θεώρημα Μέσης Τιμής* υπάρχει $x_2\in\left(x+1,x+2\right)$ τέτοιο ώστε:

$F'\left(x_2\right)=\dfrac{F\left(x+2\right)-F\left(x+1\right)}{x+2-x-1}=F\left(x+2\right)-F\left(x+1\right),\ x\in\mathbb{R}\,.$ **(3)**

Από **(2),(3)** και με τη βοήθεια της μονοτονίας της F' είναι:

$x_1<x_2\Rightarrow F'\left(x_1\right)<F'\left(x_2\right)\Rightarrow F\left(x+1\right)-F\left(x\right)<F\left(x+2\right)-F\left(x+1\right)$

Άρα $\int_0^{x+1}f\left(t\right)dt-\int_0^x f\left(t\right)dt<\int_0^{x+2}f\left(t\right)dt-\int_0^{x+1}f\left(t\right)dt\Leftrightarrow$

$\int_0^{x+1}f\left(t\right)dt+\int_x^0 f\left(t\right)dt<\int_0^{x+2}f\left(t\right)dt+\int_{x+1}^0 f\left(t\right)dt\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\int_x^{x+1}f\left(t\right)dt<\int_{x+1}^{x+2}f\left(t\right)dt$

(1) Αιτιολόγηση: $\sqrt{u^2+9}>\sqrt{u^2}=\left|u\right|>-u\,.$

2ος τρόπος : $f'\left(x\right)=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+9}}=\dfrac{\sqrt{x^2+9}+x}{\sqrt{x^2+9}}>0\,,\ x\in\mathbb{R}$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F\left(u\right)=\int_u^{u+1}f\left(t\right)dt=\int_0^{u+1}f\left(t\right)dt-\int_0^u f\left(t\right)dt\,,\quad u\in\mathbb{R}\,,$ η οποία είναι παραγωγίσιμη με παράγωγο $F'\left(u\right)=f\left(u+1\right)-f\left(u\right)>0$ για κάθε $u\in\mathbb{R}\,.$

Άρα η F είναι γνησίως αύξουσα. Οπότε: $F(x) < F(x+1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή

$\int_x^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

3ος τρόπος : $f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{\sqrt{x^2+9}+x}{\sqrt{x^2+9}} > 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

$f(t) < f(t+1)$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Άρα $\int_x^{x+1} f(t)dt < \int_x^{x+1} f(t+1)dt$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Όμως

$\int_x^{x+1} f(t+1)dt \overset{t+1=u}{=} \int_{x+1}^{x+2} f(u)du = \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$. Έτσι, $\int_x^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Θέμα 11ο.

Δίνεται η f συνεχής στο $\mathbb{R}$, $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $\int_1^{|z|} f(x)dx=0$ και $f(1)=1$.

α. Να δειχτεί ότι $f(x)>0$

β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των z.

γ. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(|z+\overline{z}|-3)x^3+x}{(|z-\overline{z}|-3)x^2+x}$

δ. Αν το εμβαδόν της f με $x'x$ από τη $x=0$ μέχρι τη $x=1$ είναι μικρότερο του $|z+2\overline{z}|$, να δειχτεί ότι η εξίσωση $\int_0^x f(t)dt=3x^2+6x-6$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$

(Θέμα 35 Συλλογής)

Λύση:

α. Η f και διάφορη του μηδενός για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και συνεπώς διατηρεί πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Αφού $f(1)=1>0$, έχουμε $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β. Η σχέση $\int_1^{|z|} f(x)dx=0$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Οπότε $|z|=1$. Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z είναι ο μοναδιαίος κύκλος.

γ. Για $z=\alpha+\beta i$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ έχουμε $|z+\overline{z}|=2|\alpha|$ και $|z-\overline{z}|=2|\beta|$. Οπότε:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(|z+\overline{z}|-3)x^3+x}{(|z-\overline{z}|-3)x^2+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(2|\alpha|-3)x^3+x}{(2|\beta|-3)x^2+x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{(2|\alpha|-3)x^3}{(2|\beta|-3)x^2}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2|\alpha|-3}{2|\beta|-3}x\right)=-\infty$$

διότι Η εικόνα του z κινείται στον μοναδιαίο κύκλο και συνεπώς $|\alpha|\le 1<\dfrac{3}{2}$, άρα $2|\alpha|-3<0$. Ομοίως $2|\beta|-3<0$.

δ. Το εμβαδόν που περικλείεται από τη C_f, τον οριζόντιο άξονα και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$ είναι $\int_0^1 f(x)dx$ αφού λόγω του **(α)** έχουμε $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα $\int_0^1 f(x)dx<|z+2\overline{z}|\le|z|+2|\overline{z}|=|z|+2|z|=3|z|=3$. Άρα $\int_0^1 f(x)dx-3<0$ **(1)**.

Θεωρώ τη συνάρτηση $h(x)=\int_0^x f(t)dt-3x^2-6x+6$ με $x\in[0,1]$. Η $h(x)$ συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις των συνεχών $\int_0^x f(t)dt$ (η $f(x)$ συνεχής και άρα η $\int_0^x f(t)dt$ παραγωγίσιμη) και $-3x^2-6x+6$ (συνεχής ως πολυωνυμική)..

Επιπλέον $h(0)=6>0$ και $h(1)=\int_0^1 f(x)dx-3<0$ από τη σχέση **(1)**. Από *Θεώρημα Bolzano*, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $h(x_0)=0\Leftrightarrow\int_0^{x_0} f(t)dt-3t^2-6t+6=0$.

Θέμα 12ο.

α. Δίνονται οι μιγαδικοί z_1, z_2 για τους οποίους ισχύει $|z_1+\overline{z}_2| \le |\overline{z}_1 - z_2|$. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών $w = z_1 \cdot z_2$.

β. Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1 = 1 + i\alpha^{f(x)}$ και $z_2 = (1+f(x)) + i$ που ικανοποιούν τη σχέση του ερωτήματος **(α)** και f είναι μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ και $f'(0)\neq 0$. Να δειχθεί ότι $2<\alpha<3$

γ. Αν για τη συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \text{Im}(z_1 \cdot z_2)$ ισχύει το θεώρημα Rolle στο $[\gamma,\delta]$ να δείξετε ότι

$$\frac{e^{f(\gamma)}}{e^{f(\delta)}} = \frac{1+f(\delta)}{1+f(\gamma)}, \quad f(\gamma)\neq -1$$

(Θέμα 37 Συλλογής)

Λύση:

α. $|z_1+\overline{z}_2| \le |\overline{z}_1 - z_2| \Leftrightarrow |z_1+\overline{z}_2|^2 \le |\overline{z}_1 - z_2|^2 \Leftrightarrow (z_1+\overline{z}_2)\left(\overline{z_1+\overline{z}_2}\right) \le (\overline{z}_1 - z_2)\left(\overline{\overline{z}_1 - z_2}\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z_1+\overline{z}_2)(\overline{z}_1+z_2) \le (\overline{z}_1 - z_2)(z_1 - \overline{z}_2) \Leftrightarrow z_1\overline{z}_1 + z_1z_2 + \overline{z}_2\overline{z}_1 + \overline{z}_2z_2 \le \overline{z}_1z_1 - \overline{z}_1\overline{z}_2 - z_2z_1 + z_2\overline{z}_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2z_1z_2 + 2\overline{z}_1\overline{z}_2 \le 0 \Leftrightarrow 2(z_1z_2 + \overline{z}_1\overline{z}_2) \le 0 \Leftrightarrow 4\text{Re}(z_1z_2) \le 0$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z_1z_2 είναι το ημιεπίπεδο για τα $x \le 0$.

β. Αφού οι $z_1 = 1 + i\alpha^{f(x)}$ και $z_2 = 1 + f(x) + i$ ικανοποιούν τη σχέση του ερωτήματος **α.** θα ισχύει για αυτούς $\text{Re}(z_1z_2) \le 0$.

Όμως $z_1z_2 = (1+i\alpha^{f(x)})(1+f(x)+i) = 1+f(x)+i+i\alpha^{f(x)} + i\alpha^{f(x)}f(x) - \alpha^{f(x)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z_1z_2 = (1+f(x)-\alpha^{f(x)}) + (1+\alpha^{f(x)} + \alpha^{f(x)}f(x))i$.

Οπότε $\text{Re}(z_1z_2) \le 0 \Leftrightarrow 1+f(x)-\alpha^{f(x)} \le 0$.

Θεωρώ $h(x) = 1+f(x)-\alpha^{f(x)}$ με $x\in\mathbb{R}$. Τότε έχουμε $h(x)\le 0 \Leftrightarrow h(x) \le h(0)$. Δηλαδή η $h(x)$ παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0 = 0$. Επιπλέον η $h(x)$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων με

$h'(x) = f'(x) - \alpha^{f(x)} \cdot \ln\alpha \cdot f'(x) \Leftrightarrow h'(x) = f'(x)(1-\alpha^{f(x)}\ln\alpha)$, άρα παραγωγίσιμη και στο $x_0 = 0$. Από *Θεώρημα Fermat* λοιπόν θα ισχύει : $h'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0)(1-\alpha^{f(0)}\ln\alpha) = 0$.

Όμως $f'(0)\neq 0$, οπότε $1-\alpha^{f(0)}\ln\alpha = 0 \Leftrightarrow 1-\ln\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = e$. Συνεπώς ισχύει $2<\alpha<3$.

γ. Για την $g(x)$ έχουμε: $g(x) = \text{Im}(z_1z_2) \Leftrightarrow g(x) = 1 + e^{f(x)} + e^{f(x)}f(x)$. Η $g(x)$ ικανοποιεί τις

προϋποθέσεις του *θεωρήματος Rolle* στο $[\gamma,\delta]$ και συνεπώς η $g(x)$ συνεχής στο $[\gamma,\delta]$, παραγωγίσιμη στο αντίστοιχο ανοιχτό διάστημα (γ,δ) και $g(\gamma)=g(\delta)$.

Οπότε $g(\gamma)=g(\delta) \Leftrightarrow 1+e^{f(\gamma)}+e^{f(\gamma)}f(\gamma)=1+e^{f(\delta)}+e^{f(\delta)}f(\delta) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{f(\gamma)}\left(1+f(\gamma)\right)=e^{f(\delta)}\left(1+f(\delta)\right) \Leftrightarrow \dfrac{e^{f(\gamma)}}{e^{f(\delta)}}=\dfrac{1+f(\delta)}{1+f(\gamma)}$ με $f(\gamma)\neq -1$.

Θέμα 13ο.

Δίνονται οι μιγαδικοί $z_1=\alpha+\beta i$ και $z_2=\dfrac{2-\overline{z}_1}{2+\overline{z}_1}$ όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\beta\neq 0$. Δίνεται επίσης ότι $z_2-z_1\in\mathbb{R}$.

α. Να αποδείξετε ότι $z_2-z_1=1$

β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z_1, στο μιγαδικό επίπεδο.

γ. Αν ο αριθμός z_1^2 είναι φανταστικός και $\alpha\beta>0$, να υπολογιστεί ο z_1 και να δειχθεί ότι $(z_1+1+i)^{20}-(\overline{z}_1+1-i)^{20}=0$

(Επαναληπτικές 2007)

Λύση:

α. Έχουμε $z_2=\dfrac{2-(\alpha-\beta i)}{2+\alpha-\beta i}=\dfrac{(2-\alpha+\beta i)(2+\alpha+\beta i)}{(2+\alpha)^2+\beta^2}=\dfrac{4-\alpha^2-\beta^2+4\beta i}{(2+\alpha)^2+\beta^2}$

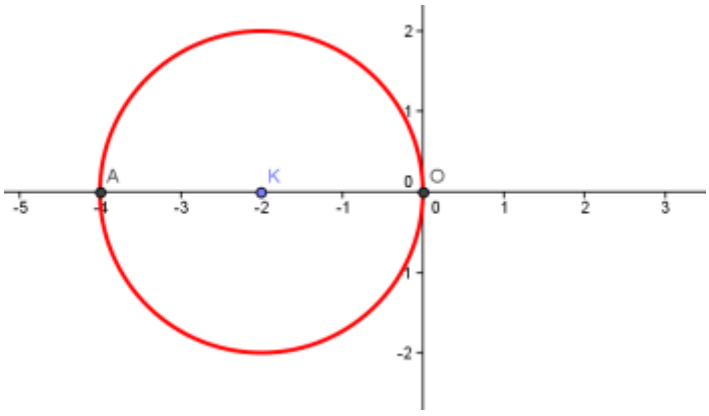
Επομένως $z_2-z_1=\left(\dfrac{4-\alpha^2-\beta^2}{(2+\alpha)^2+\beta^2}-\alpha\right)+\left(\dfrac{4\beta}{(2+\alpha)^2+\beta^2}-\beta\right)i$ **(1)**

Επειδή $z_2-z_1\in\mathbb{R}$, θα ισχύει $\dfrac{4\beta}{(2+\alpha)^2+\beta^2}=\beta\Leftrightarrow(2+\alpha)^2+\beta^2=4$ **(2)** και μετά τις πράξεις $\alpha^2+\beta^2=-4\alpha$ **(3)**

Από τις **(1)** και **(2)** προκύπτει $z_2-z_1=\dfrac{4-\alpha^2-\beta^2-4\alpha}{4}=1$, λόγω της **(3)**.

β. Από την σχέση **(2)** έχουμε ότι ο $z_1=\alpha+\beta i$ ικανοποιεί τη συνθήκη $(2+\alpha)^2+\beta^2=4$ οπότε προκύπτει ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z_1 είναι κύκλος με κέντρο $K(-2,0)$ και ακτίνα $\rho=2$.

Αν $\beta=0$, τότε από την **(2)** προκύπτει $\alpha=0$ ή $\alpha=4$. Επειδή δίνεται ότι $\beta\neq 0$, εξαιρούνται από τον παραπάνω γεωμετρικό τόπο τα σημεία $A(-4,0)$ και $O(0,0)$.



γ. Είναι $z_1^2 = (\alpha+\beta i)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta i$. Επειδή ο z_1^2 είναι φανταστικός, θα είναι $\alpha^2 - \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta$. Όμως $\alpha\beta > 0$, άρα $\alpha = \beta$.

Επομένως $z_1 = \alpha + \alpha i$.

Έστω $w = z_1 + 1 + i = \alpha + \alpha i + 1 + i = (\alpha+1)(1+i)$, οπότε $\overline{w} = \overline{z}_1 + 1 - i = \alpha - \alpha i + 1 - i = (\alpha+1)(1-i)$.

Επειδή $w^2 = (\alpha+1)^2(1+i)^2 = 2i(\alpha+1)^2$ και $\overline{w}^2 = (\alpha+1)^2(1-i)^2 = -2i(\alpha+1)^2$,

Θα έχουμε $w^{20} - \overline{w}^{20} = (2i)^{10}(\alpha+1)^{20} - (-2i)^{10}(\alpha+1)^{20} = -2^{10}(\alpha+1)^{20} + 2^{10}(\alpha+1)^{20} = 0$

Θέμα 14ο.

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^*$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τέτοια ώστε να ισχύει: $2f'(x)-f^2(x)\eta\mu x=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=\frac{1}{2}$

α. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι ο $f(x)=\frac{2}{3+\sigma\upsilon\nu x}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β. Να δείξετε ότι $\frac{1}{2}\le f(x)\le 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ. Έστω g μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $g'(x)=f(x)\cdot e^{-g(x)}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε:

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=e^{g(x)}$ είναι κοίλη στο $(\pi,2\pi)$.

ii. Να δείξετε ότι: $1\le e^{g(x+1)}-e^{g(x-1)}\le 2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

iii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{g(x)}-2x+2012=0$, έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.

Λύση:

α. $2f'(x)-f^2(x)\cdot\eta\mu x=0\Leftrightarrow 2f'(x)=f^2(x)\cdot\eta\mu x\overset{f(x)\neq 0}{\Leftrightarrow}-\frac{f'(x)}{f^2(x)}=-\frac{\eta\mu x}{2}$, άρα $\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=\left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{2}\right)'$.

Επομένως $\frac{1}{f(x)}=\frac{\sigma\upsilon\nu x}{2}+c$. Για $x=0$ έχουμε $2=\frac{1}{2}+c\Rightarrow c=\frac{3}{2}$ άρα $\frac{1}{f(x)}=\frac{\sigma\upsilon\nu x+3}{2}$ οπότε

$f(x)=\frac{2}{\sigma\upsilon\nu x+3}$, $x\in\mathbb{R}$.

β. $\frac{1}{2}\le f(x)\le 1\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le\frac{2}{\sigma\upsilon\nu x+3}\le 1\Leftrightarrow\frac{1}{4}\le\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x+3}\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\ge\sigma\upsilon\nu x+3\ge 2\Leftrightarrow 2\le\sigma\upsilon\nu x+3\le 4\Leftrightarrow -1\le\sigma\upsilon\nu x\le 1$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$

γ.i. Είναι : $h'(x)=e^{g(x)}\cdot g'(x)=e^{g(x)}\cdot f(x)\cdot e^{-g(x)}=f(x)$, παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h''(x)=f'(x)=\frac{2\eta\mu x}{(1+\sigma\upsilon\nu x)^2}<0$ για κάθε $x\in(\pi,2\pi)$. άρα $h(x)$ κοίλη στο $(\pi,2\pi)$.

γ.ii. Ισχύουν για την $h(x)$ οι υποθέσεις του *Θ.Μ.Τ.* στο διάστημα $[x-1,x+1]$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (x-1,x+1)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi)=\dfrac{h(x+1)-h(x-1)}{(x+1)-(x-1)} \Rightarrow f(\xi)=\dfrac{e^{g(x+1)}-e^{g(x-1)}}{2}$.

Όμως $\dfrac{1}{2} \le f(\xi) \le 1$ άρα $\dfrac{1}{2} \le \dfrac{e^{g(x+1)}-e^{g(x-1)}}{2} \le 1$ οπότε $1 \le e^{g(x+1)}-e^{g(x-1)} \le 2$

iii. Έστω $\varphi(x)=e^{g(x)}-2x+2012$, $x \in \mathbb{R}$, Παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ σαν πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $\varphi'(x)=e^{g(x)} \cdot g'(x)-2=f(x)-2<0$ οπότε η $\varphi(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα η $\varphi(x)=0$ έχει το πολύ μία ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Θέμα 15ο.

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο $F(x)=\int_0^1 e^{tx^2}dt$. Να βρεθούν:

α. ο τύπος της συνάρτησης.

β. η τιμή $F(0)$ και να ελεγχθεί η συνέχεια το σημείο $x_0=0$.

γ. η τιμή $F'(0)$.

δ. η μονοτονία και η καμπυλότητα της συνάρτησης F.

ε. ισχύει ότι $1\le F(x)\le e^{x^2}$, $x\neq 0$.

στ. τα $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{\eta\mu x}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{F(x)}{x}$.

Λύση:

α. Αν $u=tx^2$ τότε $du=x^2dt$ και $t=0\to u=0$, $t=1\to u=x^2$ οπότε με $x\neq 0$ ή

$$F(x)=\frac{1}{x^2}\int_0^1 e^{tx^2}x^2dt=\frac{1}{x^2}\int_0^{x^2}e^u du=\frac{1}{x^2}\left[e^u\right]_0^{x^2}=\frac{e^{x^2}-1}{x^2}.$$

β. Είναι $F(0)=\int_0^1 e^0dt=1$ και $\lim\limits_{x\to 0}F(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}\underset{\substack{x\to 0\\ u\to 0}}{\overset{u=x^2}{=}}\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{e^u-1}{u}=e^0=1=F(0)$ άρα είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$.

γ. Αν θεωρήσουμε την $g(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$, $x\neq 0$ και $g(0)=1$ τότε η $F(x)=g(x^2)$, $x\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x^2)-1}{x}\overset{\text{DLH}}{\underset{x\to 0}{=}}\lim\limits_{x\to 0}2xg'(x^2)$ και επειδή είναι $g'(x)=\dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2}$, $x\neq 0$ και επειδή $\lim\limits_{x\to 0}g'(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2}\overset{\text{DLH}}{=}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+xe^x-e^x}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}e^x=\dfrac{1}{2}$ θα είναι και $\lim\limits_{x^2\to 0}g'(x^2)=\dfrac{1}{2}$ άρα θα έχουμε και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}2xg'(x^2)=2\cdot 0\cdot\dfrac{1}{2}=0$ άρα παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=0$ με $F'(0)=0$.

δ. Είναι $F(x)=g(x^2)$, $x\neq 0$ άρα παραγωγίσιμη με $F'(x)=2xg'(x^2)$, $x\neq 0$ και για την $g'(x)=\dfrac{xe^x-e^x+1}{x^2}$, $x\neq 0$ έχουμε ότι αν $h(x)=xe^x-e^x+1$, $x\ge 0$ επειδή $h'(x)=xe^x>0$, $x>0$ άρα η h είναι γνήσια αύξουσα στο $[0,+\infty)$ επομένως για $x>0$ ισχύει ότι $h(x)>h(0)=0$ επομένως

$g'(x)=\dfrac{h(x)}{x^2}>0$, $x>0$, άρα και $g'(x^2)>0$, $x\neq 0$ επομένως για την $F'(x)=2xg'(x^2)$ θα είναι $F'(x)>0$, $x>0$ άρα γνήσια αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και $F'(x)<0$, $x<0$, άρα γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.

Τώρα είναι $F''(x)=2g'(x^2)+4x^2g''(x^2)$, $x\neq 0$ με $g''(x)=\dfrac{xe^xx^2-2x(xe^x-e^x+1)}{x^4}$, $x>0$ ή

$$g''(x)=\frac{xe^xx^2-2x^2e^x+2xe^x-2x}{x^4}=\frac{x^2e^x-2xe^x+2e^x-2}{x^3}$$

οπότε αν θεωρήσουμε την $\varphi(x)=x^2e^x-2xe^x+2e^x-2$, $x\geq 0$ έχουμε ότι

$\varphi'(x)=2xe^x+x^2e^x-2e^x-2xe^x+2e^x=x^2e^x>0$, $x>0$.

άρα γνήσια αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Επομένως θα ισχύει ότι $\varphi(x)>\varphi(0)=0$, $x>0$ επομένως η $g''(x)=\dfrac{\varphi(x)}{x^3}>0$, $x>0$ άρα και $g''(x^2)>0$, $x\neq 0$ άρα

$F''(x)=2g'(x^2)+4x^2g''(x^2)>0$, $x\neq 0$ δηλαδή η F είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

ε. Είναι $0\leq t\leq 1$ άρα και $0\leq x^2t\leq x^2$, $x\neq 0$ επομένως και $e^0\leq e^{x^2t}\leq e^{x^2}$ άρα και $\int_0^1 1dt\leq\int_0^1 e^{x^2t}dt\leq\int_0^1 e^{x^2}dt\Leftrightarrow 1\leq\int_0^1 e^{x^2t}dt\leq e^{x^2}$ **(1)**.

στ. Είναι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{\eta\mu x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{F(x)}{x}\dfrac{x}{\eta\mu x}=F'(0)\cdot 1=0$.

Ακόμη από $F(x)=\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}$, $x\neq 0$ είναι $\dfrac{F(x)}{x}=\dfrac{e^{x^2}-1}{x^3}$ και

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{F(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}-1}{x^3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2xe^{x^2}}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{x^2}}{x}=\frac{2}{3}\lim_{x\to+\infty}2xe^{x^2}=+\infty$$

και όμοια στο $-\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{F(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{e^{x^2}-1}{x^2}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{x^2}-1}{x^3}\overset{\text{DEL}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{2xe^{x^2}}{3x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2e^{x^2}}{3x}\overset{\text{DEL}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{4xe^{x^2}}{3}=-\infty$$

Θέμα 16ο.

Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει :

$\int_x^{2x-1}\left(2xf\left(2x-t\right)-\left(t+1\right)f\left(2x-t\right)\right)dt=e^x-ex$, και ο μιγαδικός $z\in\mathbb{C}$ για τον οποίο ισχύει $f\left(z\bar{z}+4\right)\le f\left(4|z|\right)$.

α. Να βρείτε το τύπο της f.

β. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο της εικόνας του z.

γ. Ένα κινητό Μ κινείται στο γεωμετρικό τόπο του z.

i. Να βρείτε σε ποιο σημείο του γεωμετρικού τόπου ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του Μ ως προς το χρόνο t είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης y, αν υποτεθεί ότι $y\left(t\right)\ge 0$ και $x'\left(t\right)<0$ για κάθε $t\ge 0$.

ii. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης y τη χρονική στιγμή που το κινητό Μ περνάει από το $A\left(1,-3\right)$, όπου η τετμημένη x ελαττώνεται με ρυθμό 2 μονάδες το δευτερόλεπτο.

Λύση:

1. Με $2x-t=u$ έχουμε ότι $-dt=du$ και $t=x\to u=x$, $t=2x-1\to u=1$ άρα από $\int_x^{2x-1}\left(2xf\left(2x-t\right)-\left(t+1\right)f\left(2x-t\right)\right)dt=e^x-ex$ προκύπτει ότι

$\int_x^1\left(2xf\left(u\right)-\left(2x-u+1\right)f\left(u\right)\right)\left(-du\right)=e^x-ex$ ή

$\int_1^x\left(2xf\left(u\right)-2xf\left(x\right)+\left(u-1\right)f\left(u\right)\right)du=e^x-ex$ ή

$\int_1^x\left(\left(u-1\right)f\left(u\right)\right)du=e^x-ex$ **(1)** και παραγωγίζοντας έχουμε ότι $\left(x-1\right)f\left(x\right)=e^x-e$ και για $x\ne 1$ είναι $f\left(x\right)=\dfrac{e^x-e}{x-1}$.

Επειδή τώρα η f είναι συνεχής στο $x=1$ θα είναι $\lim\limits_{x\to 1}f\left(x\right)=f\left(1\right)$ και αφού

$\lim\limits_{x\to 1}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x-e^1}{x-1}=e$ (από τον ορισμό του παράγωγου αριθμού) θα είναι $f\left(1\right)=e$ άρα είναι $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{e^x-e}{x-1}, & x\ne 1\\ e, & x=1\end{cases}$.

β. Είναι η f παραγωγίσιμη για $x\ne 1$ με $f'\left(x\right)=\dfrac{\left(e^x-e\right)\left(x-1\right)-e^x}{\left(x-1\right)^2}=\dfrac{xe^x-2e^x+e}{\left(x-1\right)^2}$.

Τώρα για την $g(x)=xe^x-2e^x+e$ ισχύει ότι $g'(x)=e^x+xe^x-2e^x=(x-1)e^x$ άρα $g'(x)>0,\ x>1$ επομένως γνήσια αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και $g'(x)<0,\ x<1$, επομένως γνήσια φθίνουσα στο $(-\infty,1]$, άρα έχει ολικό ελάχιστο στο $x_0=1$ δηλαδή ισχύει $g(x)\geq g(1)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επομένως για την $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x-1)^2}$ ισχύει $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ και αφού είναι συνεχής στο $x_0=1$ θα είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Ισχύει ακόμα ότι $(|z|-2)^2\geq 0\Leftrightarrow |z|^2-4|z|+4\geq 0\Leftrightarrow z\bar{z}+4\geq 4|z|$ οπότε θα είναι $f(z\bar{z}+4)\geq f(4|z|)$ και αφού από υπόθεση έχουμε ότι $f(z\bar{z}+4)\leq f(4|z|)$ θα ισχύει ότι $f(z\bar{z}+4)=f(4|z|)\Leftrightarrow z\bar{z}+4=4|z|\Leftrightarrow (|z|-2)^2=0$ άρα $|z|=2$ οπότε η εικόνα του z ανήκει σε κύκλο κέντρου $O(0,0)$ και ακτίνας $\rho=2$.

γ.i. Ισχύει κάθε χρονική στιγμή ότι $x^2(t)+y^2(t)=4$ και θέλουμε σε ποιο σημείο ισχύει ότι $x'(t_0)=y'(t_0)$ οπότε παραγωγίζοντας την ισότητα ως προς το χρόνο έχουμε ότι $2x(t)x'(t)+2y(t)y'(t)=0\Leftrightarrow x(t)x'(t)+y(t)y'(t)=0$ και για $t=t_0$ ισχύει $x(t_0)x'(t_0)+y(t_0)y'(t_0)=0$ και αφού $x'(t_0)=y'(t_0)<0$ θα ισχύει ότι

$x(t_0)+y(t_0)=0\Leftrightarrow x(t_0)=-y(t_0)$ επομένως από $x^2(t_0)+y^2(t_0)=4\Leftrightarrow 2y^2(t_0)=4\Leftrightarrow y(t_0)=\sqrt{2}$ και τότε $x(t_0)=-\sqrt{2}$ άρα στο σημείο $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$ ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του Μ ως προς το χρόνο t είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης y.

ii. Τώρα όταν $x(t_0)=1,\ y(t_0)=\sqrt{3}$ και $x'(t_0)=-2$ από $x(t)x'(t)+y(t)y'(t)=0$ προκύπτει ότι $1(-2)+\sqrt{3}y'(t_0)=0\Leftrightarrow y'(t_0)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Θέμα 17ο.

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x>0$ ισχύουν $f(x)>0$, $f'(x)+2xf(x)=0$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$.

α. Να δείξετε ότι η παράγωγος της f είναι συνεχής στο ανοικτό διάστημα $(0,+\infty)$ και να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f.

β. Να δείξετε ότι $\dfrac{x-1}{2x}f(x)<\int_1^x\dfrac{f(t)}{2t^2}dt<\dfrac{x-1}{2}$, $x>1$.

γ. Να βρείτε τη συνάρτηση $F(x)=\int_1^x\left(1+\dfrac{1}{2t^2}\right)f(t)dt$, $x>1$.

δ. Να αποδείξετε ότι $2e\int_1^x e^{-t^2}dt<1$, για κάθε $x>1$.

Λύση:

α. Για κάθε $x>0$ είναι $f'(x)+2xf(x)=0\Leftrightarrow f'(x)=-2xf(x)$. Η συνάρτηση $-2x$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ και η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο $(0,+\infty)$, συνεπώς η f' είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων. Ακόμη για κάθε $x>0$ είναι

$$f'(x)+2xf(x)=0\Leftrightarrow e^{x^2}f'(x)+e^{x^2}2xf(x)=e^{x^2}\cdot 0\Leftrightarrow\left(e^{x^2}f(x)\right)'=0\Leftrightarrow e^{x^2}\cdot f(x)=c,$$

όπου c πραγματική σταθερά. Επειδή η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(1,1)$ θα είναι $f(1)=1$, άρα $e^{1^2}\cdot f(1)=c\Leftrightarrow e\cdot 1=c\Leftrightarrow c=e$. Συνεπώς για κάθε $x>0$ είναι

$$e^{x^2}\cdot f(x)=e\Leftrightarrow f(x)=e^{1-x^2}.$$

β. Έστω $g(t)=\dfrac{f(t)}{2t^2}$, $t>0$. Είναι

$$g'(t)=\frac{f'(t)2t^2-f(t)\left(2t^2\right)'}{\left(2t^2\right)^2}=\frac{f'(t)2t^2-4tf(t)}{\left(2t^2\right)^2}\overset{f'(t)=-2tf(t)}{=}\frac{-2tf(t)2t^2-4tf(t)}{\left(2t^2\right)^2}=-f(t)\frac{t^2+1}{t^3}=$$

$=-e^{1-t^2}\dfrac{t^2+1}{t^3}<0$, για κάθε $t>0$. Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$. Για κάθε $t\in[1,x]$ έχουμε : $1\le t\le x\Leftrightarrow g(1)\ge g(t)\ge g(x)\Leftrightarrow g(1)-g(t)\ge 0$ και $g(t)-g(x)\ge 0$. Επίσης αν $1<t<x\Leftrightarrow g(1)>g(t)>g(x)\Leftrightarrow g(1)-g(t)>0$ και $g(t)-g(x)>0$. Επειδή λοιπόν οι $g(1)-g(t)$, $g(t)-g(x)$ δεν είναι παντού μηδέν, είναι συνεχείς και μη αρνητικές στο $[1,x]$ θα έχουμε :

$\int_1^x \left(g(1)-g(t)\right)dt > 0$ **(1)** και $\int_1^x \left(g(t)-g(x)\right)dt > 0$ **(2)**.

Από την **(1)** προκύπτει $\int_1^x g(1)dt > \int_1^x g(t)dt \Leftrightarrow \int_1^x \frac{1}{2}dt > \int_1^x \frac{f(t)}{2t^2}dt \Leftrightarrow \int_1^x \frac{f(t)}{2t^2}dt < \frac{1}{2}(x-1)$.

Από την **(2)** προκύπτει $\int_1^x g(t)dt > \int_1^x g(x)dt \Leftrightarrow \int_1^x \frac{f(t)}{2t^2}dt > g(x)\int_1^x 1dt \Leftrightarrow \int_1^x \frac{f(t)}{2t^2}dt > \frac{f(x)}{2x^2}(x-1)$.

Επομένως $\frac{x-1}{2x^2}f(x) < \int_1^x \frac{f(t)}{2t^2}dt < \frac{x-1}{2}$, $x>1$.

γ. Για κάθε $x>1$ έχουμε $F(x) = \int_1^x \left(1+\frac{1}{2t^2}\right)f(t)dt = \int_1^x \left(f(t)+\frac{f(t)}{2t^2}\right)dt = \int_1^x \left(e^{1-t^2}+\frac{e^{1-t^2}}{2t^2}\right)dt =$

$$= \int_1^x \left(-\frac{1}{2t}e^{1-t^2}\right)' dt = \left[-\frac{1}{2t}e^{1-t^2}\right]_1^x = -\frac{1}{2x}e^{1-x^2}+\frac{1}{2\cdot 1}e^{1-1^2} = -\frac{1}{2x}e^{1-x^2}+\frac{1}{2} \quad .$$

δ. Η σχέση $2e\int_1^x e^{-t^2}dt < 1$ γράφεται ισοδύναμα

$2\int_1^x e^{1-t^2}dt < 1 \Leftrightarrow 2\int_1^x f(t)dt < 1 \Leftrightarrow \int_1^x f(t)dt < \frac{1}{2}$ **(3)**.

Είναι $e^{1-x^2} > 0 \Leftrightarrow e^{1-x^2}-1 > -1 \Leftrightarrow f(x)-f(1) > -1 \Leftrightarrow \int_1^x f'(t)dt > -1 \Leftrightarrow \int_1^x -2tf(t)dt > -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_1^x tf(t)dt < \frac{1}{2}$ **(4)**.

Για κάθε $t>1 \overset{f(t)>0}{\Leftrightarrow} tf(t) > f(t) \Leftrightarrow tf(t)-f(t) > 0$. Επειδή η $tf(t)-f(t)$ είναι συνεχής στο $[1,x]$ (με $x>1$), δεν είναι παντού μηδέν στο $[1,x]$ και για κάθε $t\in[1,x]$ είναι $tf(t)-f(t) \geq 0$ θα ισχύει $\int_1^x \left(tf(t)-f(t)\right)dt > 0 \Leftrightarrow \int_1^x tf(t)dt > \int_1^x f(t)dt$ **(5)**. Από τις **(4)** και **(5)** παίρνουμε $\int_1^x f(t)dt < \frac{1}{2}$, δηλαδή την **(3)** , οπότε το ζητούμενο έχει αποδειχθεί.

Θέμα 18ο.

Έστω συνάρτηση f, δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με την f'' συνεχή στους πραγματικούς αριθμούς.

Αν η συνάρτηση f'' ικανοποιεί τις συνθήκες $f''(x)f(x)+[f'(x)]^2=f(x)f'(x)$, $f(0)=2f'(0)=1$ τότε :

α. Να βρείτε τον τύπο της f.

β. Να αποδείξετε ότι $\int_{-\alpha}^{\alpha} x^{2004}\ln f(x)dx=0$, $\alpha>0$.

γ. Αν g είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0,1]$ με σύνολο τιμών το $[0,1]$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x-\int_0^x \frac{g(t)}{1+f^2(t)}dt=1$ έχει μια μόνο λύση στο $[0,1]$.

(Θέμα 127 Συλλογής)

Λύση

α. $f''(x)f(x)+\left[f'(x)\right]^2=f(x)f'(x)\Leftrightarrow\left(2f(x)f'(x)\right)'=\left(f^2(x)\right)'\Leftrightarrow 2f(x)f'(x)=f^2(x)+c$.

Για $x=0$ η τελευταία γίνεται: $1=1+c\Leftrightarrow c=0$. Άρα:

$$f^2(x)=2f(x)f'(x)\Leftrightarrow f^2(x)=\left(f^2(x)\right)'\Leftrightarrow f^2(x)e^{-x}-\left(f^2(x)\right)'e^{-x}=0\Leftrightarrow\left(f^2(x)e^{-x}\right)'=0$$
$$\Leftrightarrow f^2(x)e^{-x}=c_1.$$

Επειδή $f(0)=1$ τότε $c_1=1$ άρα: $f^2(x)=e^x$.

Από την τελευταία σχέση προφανώς η $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα θα διατηρεί σταθερό πρόσημο, και αφού $f(0)=1$ τότε $f(x)>0$ για κάθε . Οπότε τελικά: $f(x)=e^{\frac{x}{2}}$.

β. Έστω $h(x)=x^{2004}\ln f(x)=x^{2004}\cdot\frac{x}{2}$. Τότε είναι: $h(-x)=(-x)^{2004}\cdot\frac{-x}{2}=-h(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Άρα η g είναι περιττή, όποτε $\int_{-\alpha}^{\alpha}h(x)dx=0$.

γ. Η g έχει σύνολο τιμών το $[0,1]$οπότε $0\le g(x)\le 1$. Όμως $1+f^2(x)>1\Leftrightarrow 0<\frac{1}{1+f^2(x)}<1$. Άρα:

$$0\le\frac{g(x)}{1+f^2(x)}\le 1\Leftrightarrow 1-\frac{g(x)}{1+f^2(x)}\ge 0$$ Οπότε: $1-\int_0^1\frac{g(t)}{1+f^2(t)}dt>0$.

Έστω τώρα η συνεχής συνάρτηση στο $[0,1]$ με $\varphi(x)=2x-\int_0^x\frac{g(t)}{1+f^2(t)}dt-1$.

$\varphi(0)=-1<0$, $\varphi(1)=1-\int_0^1 \frac{g(t)}{1+f^2(t)}dt>0$, οπότε από Bolzano η φ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$. Όμως η συνάρτηση $\frac{g(t)}{1+f^2(t)}dt-1$ είναι συνεχής στο $[0,1]$ άρα η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη με $\varphi'(x)=2-\frac{g(x)}{1+f^2(x)}\geq 1$ όποτε η φ είναι γνησίως αύξουσα άρα έχει μοναδική ρίζα στο $(0,1)$

Θέμα 19ο.

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(t)=2t+\mu$, $t\in\mathbb{R}$, όπου η παράμετρος μ είναι ένας πραγματικός αριθμός . Μια επιχείρηση έχει έσοδα $E(t)$ που δίνονται σε εκατομμύρια δραχμές , με τον τύπο $E(t)=(t-1)\varphi(t)$, $t\geq 0$, όπου t συμβολίζει το χρόνο σε έτη .

Το κόστος λειτουργίας $K(t)$ της επιχείρησης δίνεται , επίσης σε εκατομμύρια δραχμές ,σύμφωνα με τον τύπο $K(t)=\varphi(t+4)$, $t\geq 0$.

α. Να βρείτε τη συνάρτηση κέρδους $P(t)$, για $t\geq 0$, όταν γνωρίζουμε ότι κατά το πρώτο έτος λειτουργίας η επιχείρηση παρουσίασε ζημιά δώδεκα εκατομμύρια δραχμές .

β. Ποια χρονική στιγμή θα αρχίσει η επιχείρηση να παρουσιάζει κέρδη ;

γ. Ποιος θα είναι ο ρυθμός μεταβολής της συνάρτησης κέρδους στο τέλος του δεύτερου έτους ;

δ. Να υπολογίσετε την τιμή του ολοκληρώματος $I=\frac{111}{2}\int_0^6 P(t)dt$.

Λύση

α. Για κάθε $t\geq 0$ έχουμε :

$$P(t)=E(t)-K(t)=(t-1)\varphi(t)-\varphi(t+4)=(t-1)(2t+\mu)-(2(t+4)+\mu)=$$

$$=2t^2+\mu t-2t-\mu-2t-8-\mu=2t^2+(\mu-4)t-2\mu-8\,.$$

Επειδή κατά το πρώτο έτος λειτουργίας η επιχείρηση παρουσίασε ζημιά 12 εκατομμύρια δραχμές θα είναι $P(1)=-12\Leftrightarrow 2\cdot 1^2+(\mu-4)\cdot 1-2\mu-8=-12\Leftrightarrow\mu=2$. Άρα $P(t)=2t^2+(2-4)t-2\cdot 2-8$, δηλαδή $P(t)=2t^2-2t-12$, $t\geq 0$.

β. Η επιχείρηση παρουσιάζει κέρδη όταν $P(t)>0\Leftrightarrow 2t^2-2t-12>0\Leftrightarrow t^2-t-6>0\overset{t\geq 0}{\Leftrightarrow} t>3$.

Άρα η επιχείρηση θα αρχίσει να παρουσιάζει κέρδη μετά το τέλος του τρίτου έτους.

γ. Ζητούμενο είναι το $P'(2)$. Είναι $P'(t)=4t-2$, $t\geq 0$.

Άρα $P'(2)=4\cdot 2-2=6$ εκατομμύρια δραχμές / έτος.

δ. $I=\frac{111}{2}\int_0^6 P(t)dt=\frac{111}{2}\int_0^6(2t^2-2t-12)dt=\frac{111}{2}\left[\frac{2t^3}{3}-t^2-12t\right]_0^6=1998$.

Θέμα 20ο.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(t)=\dfrac{2t+3}{t+2}$, $t\in[1,4]$ και $g(x)=\int_1^4 f(t)\dfrac{x+2}{x+1}e^{\frac{t}{x^2}}dt$, $x>0$.

α. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_1^4 f(t)dt$.

β. Να αποδείξετε ότι : $e^{\frac{1}{x^2}}\le e^{\frac{t}{x^2}}\le e^{\frac{4}{x^2}}$, για κάθε $t\in[1,4]$ και $x>0$.

γ. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

Λύση

α. Η $f(t)=\dfrac{2t+3}{t+2}$ είναι συνεχής στο $[1,4]$ ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων άρα

$$I=\int_1^4 f(t)dt=\int_1^4\frac{2t+3}{t+2}dt=\int_1^4\frac{2(t+2)-1}{t+2}dt=\int_1^4\left(2-\frac{1}{t+2}\right)dt=$$

$$=\left[2t-\ln|t+2|\right]_1^4=(8-\ln6)-(2-\ln3)=6-(\ln6-\ln3)=6-\ln2$$

β. Για κάθε $t\in[1,4]$ και $x>0$ έχουμε $1\le t\le 4 \overset{\frac{1}{x^2}>0}{\Rightarrow}\frac{1}{x^2}\le\frac{t}{x^2}\le\frac{4}{x^2}\overset{e^x\nearrow}{\Rightarrow}e^{\frac{1}{x^2}}\le e^{\frac{t}{x^2}}\le e^{\frac{4}{x^2}}$

γ. Για κάθε $t\in[1,4]$ και $x>0$ είναι $f(t)=\dfrac{2t+3}{t+2}>0$, $\dfrac{x+2}{x+1}>0$ και από την σχέση $e^{\frac{1}{x^2}}\le e^{\frac{t}{x^2}}\le e^{\frac{4}{x^2}}$ παίρνουμε $e^{\frac{1}{x^2}}f(t)\dfrac{x+2}{x+1}\le e^{\frac{t}{x^2}}f(t)\dfrac{x+2}{x+1}\le e^{\frac{4}{x^2}}f(t)\dfrac{x+2}{x+1}\Rightarrow$

$e^{\frac{t}{x^2}}f(t)\dfrac{x+2}{x+1}-e^{\frac{1}{x^2}}f(t)\dfrac{x+2}{x+1}\ge 0$ **(1)** και $e^{\frac{4}{x^2}}f(t)\dfrac{x+2}{x+1}-e^{\frac{1}{x^2}}f(t)\dfrac{x+2}{x+1}\ge 0$ **(2)**.

Λόγω της **(1)** προκύπτει $\int_1^4\left(f(t)\dfrac{x+2}{x+1}e^{\frac{t}{x^2}}-f(t)\dfrac{x+2}{x+1}e^{\frac{1}{x^2}}\right)dt\ge 0\Rightarrow$

$$\int_1^4 f(t)\frac{x+2}{x+1}e^{\frac{t}{x^2}}dt\ge\int_1^4 f(t)\frac{x+2}{x+1}e^{\frac{1}{x^2}}dt\Rightarrow\int_1^4 f(t)\frac{x+2}{x+1}e^{\frac{t}{x^2}}dt\ge\frac{x+2}{x+1}e^{\frac{1}{x^2}}\int_1^4 f(t)dt$$

$$\Rightarrow\ g(x)\ge\frac{x+2}{x+1}e^{\frac{1}{x^2}}(6-\ln2)\ \textbf{(3)}.$$

Λόγω της **(2)** προκύπτει:

$$\int_1^4 f(t)\frac{x+2}{x+1}e^{\frac{4}{x^2}}dt \geq \int_1^4 f(t)\frac{x+2}{x+1}e^{\frac{t}{x^2}}dt \Rightarrow \int_1^4 f(t)\frac{x+2}{x+1}e^{\frac{4}{x^2}}dt \geq \int_1^4 f(t)\frac{x+2}{x+1}e^{\frac{t}{x^2}}dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x+2}{x+1}e^{\frac{4}{x^2}}\int_1^4 f(t)dt \geq \frac{x+2}{x+1}e^{\frac{1}{x^2}}\int_1^4 f(t)dt \Rightarrow \frac{x+2}{x+1}e^{\frac{4}{x^2}}(6-\ln 2) \geq g(x) \quad \textbf{(4)}.$$

Από τις **(3)** και **(4)** παίρνουμε $\frac{x+2}{x+1}e^{\frac{1}{x^2}}(6-\ln 2) \leq g(x) \leq \frac{x+2}{x+1}e^{\frac{4}{x^2}}(6-\ln 2)$.

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}e^{\frac{1}{x^2}}(6-\ln 2)\right) = (6-\ln 2)\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x+1}\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x^2}} = (6-\ln 2)\cdot 1\cdot e^0 = 6-\ln 2,$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}e^{\frac{4}{x^2}}(6-\ln 2)\right) = (6-\ln 2)\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x+1}\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{4}{x^2}} = (6-\ln 2)\cdot 1\cdot e^0 = 6-\ln 2$

οπότε από το κριτήριο παρεμβολής θα ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 6-\ln 2$.

ΣΥΛΛΟΓΗ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

Θέμα 21ο.

Έστω f μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $[0,1]$ για την οποία ισχύει $f(0)>0$. Δίνεται επίσης συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ για την οποία ισχύει $g(x)>0$ για κάθε $x\in[0,1]$.

Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x)=\int_0^x f(t)g(t)dt,\ x\in[0,1], \qquad G(x)=\int_0^x g(t)dt,\ x\in[0,1].$$

α. Να δειχθεί ότι $F(x)>0$ για κάθε x στο διάστημα $(0,1]$.

β. Να αποδειχθεί ότι: $f(x)\cdot G(x)>F(x)$ για κάθε x στο διάστημα $(0,1]$.

γ. Να αποδειχθεί ότι ισχύει: $\dfrac{F(x)}{G(x)}\le\dfrac{F(1)}{G(1)}$ για κάθε x στο διάστημα $(0,1]$.

δ. Να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right)\cdot\left(\int_0^{x^2}\eta\mu t^2dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)dt\right)\cdot x^5}$.

(Πανελλαδικές 2007)

Λύση:

α. Η $F(x)=\int_0^x f(t)\cdot g(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[0,1]$ αφού οι f,g είναι συνεχείς στο $[0,1]$, με

$$F'(x)=\left(\int_0^x f(t)\cdot g(t)dt\right)'\Rightarrow F'(x)=f(x)\cdot g(x)$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ άρα για κάθε $x\in[0,1]$ θα ισχύει $f(x)\ge f(0)>0$ και $g(x)>0$ δηλαδή για κάθε $x\in(0,1]$ θα έχουμε $f(x)\cdot g(x)>0$. Οπότε και $f'(x)>0$ δηλαδή F γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ με $F(0)=0$. Έτσι αν $x\in(0,1]$ τότε: $F(x)>F(0)\Rightarrow F(x)>0$.

β. Έστω: $f(x)G(x)>F(x)\Leftrightarrow f(x)G(x)-F(x)>0\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\ \Leftrightarrow f(x)\cdot\int_0^x g(t)dt-\int_0^x f(t)\cdot g(t)dt>0\Leftrightarrow\int_0^x f(x)\cdot g(t)dt-\int_0^x f(t)\cdot g(t)dt>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\int_0^x\left(f(x)-f(t)\right)g(t)dt>0$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $\left(f(x)-f(t)\right)\cdot g(t)>0$ όταν $t\in[0,x]$

Η f αύξουσα στο $[0,x]$ άρα για κάθε $x>t$ θα έχουμε $f(x)>f(t)\Leftrightarrow f(x)-f(t)>0$ και $g(t)>0$ άρα $\left(f(x)-f(t)\right)\cdot g(t)>0$ οπότε $\int_0^x\left(f(x)-f(t)\right)g(t)dt>0$.

γ. Έστω συνάρτηση h με $h(x)=\dfrac{F(x)}{G(x)}$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1]$ σαν πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $h'(x)=\dfrac{F'(x)G(x)-F(x)G'(x)}{G^2(x)}=\dfrac{g(x)\cdot\left(f(x)G(x)-F(x)\right)}{G^2(x)}>0$

διότι $g(x)>0$ και $f(x)\cdot G(x)-F(x)>0$ από το ερώτημα **(β)** και $G^2(x)>0$ στο $(0,1]$

Άρα h γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ και αν $x\le 1$ τότε: $h(x)\le h(1)\Leftrightarrow \dfrac{F(x)}{G(x)}\le\dfrac{F(1)}{G(1)}$

δ. Έχουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right)\cdot\left(\int_0^{x^2}\eta\mu t^2dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)dt\right)\cdot x^5}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt}\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\eta\mu t^2dt}{\left(x^5\right)}=$

$\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(\int_0^x f(t)g(t)dt\right)'}{\left(\int_0^x g(t)dt\right)'}\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(\int_0^{x^2}\eta\mu t^2dt\right)'}{\left(x^5\right)'}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)\cdot g(x)}{g(x)}\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x\eta\mu x^4}{5x^4}=$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)\cdot g(x)}{g(x)}\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x\eta\mu x^4}{5x^4}=f(0)\cdot\dfrac{2}{5}\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu x^4}{x^4}\cdot\lim\limits_{x\to 0^+}x=f(0)\cdot\dfrac{2}{5}\cdot 1\cdot 0=0$

διότι $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)$ γιατί f συνεχής στο 0, και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\eta\mu x^4}{x^4}\overset{x^4\to u}{=}\lim\limits_{u\to 0^+}\dfrac{\eta\mu u}{u}=1$

Θέμα 22ο.

α. Αν f,g δύο συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ με $f(x)\le g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, να δείξετε ότι : $\int_\alpha^\beta f(x)dx\le\int_\alpha^\beta g(x)dx$.

β. Δίνεται η συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x+\ln(1+e^{-x})$

i. Να βρείτε τη μονοτονία της f και να δείξετε ότι η f είναι θετική για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

ii. Να δείξετε ότι η ευθεία ε: $y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_f.

iii. Να δείξετε ότι για κάθε $x\in[0,+\infty)$ ισχύει $\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}<\ln(1+e^{-x})<e^{-x}$.

iv. Αν Ε είναι το εμβαδό που περικλείεται από την C_f, την ασύμπτωτη ε: $y=x$ και τις ευθείες $x=0$, $x=1$, να δείξετε ότι: $\ln\left(\frac{2}{1+e^{-1}}\right)<E<1-e^{-1}$

Λύση:

Α. Είναι $f(x)\le g(x)\Leftrightarrow f(x)-g(x)\le 0$

Άρα $\int_\alpha^\beta(f(x)-g(x))dx\le 0\Leftrightarrow\int_\alpha^\beta f(x)dx-\int_\alpha^\beta g(x)dx\le 0\Leftrightarrow\int_\alpha^\beta f(x)dx\le\int_\alpha^\beta g(x)dx$

Β.i. Η f είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα των παραγωγίσιμων συναρτήσεων x, $\ln(1+e^{-x})$ με

$f'(x)=1+\frac{(1+e^{-x})'}{1+e^{-x}}=1+\frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}=\frac{1+e^{-x}-e^{-x}}{1+e^{-x}}$. Άρα $f'(x)=\frac{1}{1+e^{-x}}>0$ για κάθε $x\ge 0$.

Επομένως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ με $f(0)=0+\ln(1+1)=\ln 2>0$

Άρα για $x\ge 0\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}f(x)\ge f(0)=\ln 2>0\Rightarrow f(x)>0$

ii. Αρκεί να δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$

Είναι $f(x)-x=x+\ln(1+e^{-x})-x=\ln(1+e^{-x})$ οπότε:

$\lim\limits_{x\to+\infty}(1+e^{-x})=1+0=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(1+e^{-x})\overset{1+e^{-x}\to u}{\underset{u\to 1}{=}}\lim\limits_{u\to 1}\ln u=\ln 1=0$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$ και επομένως η $y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_f.

iii. Θέτουμε όπου $e^{-x} = t > 0$

Θα δείξουμε ότι $\frac{t}{t+1} < \ln(1+t) < t \overset{t>0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{t+1} < \frac{\ln(1+t)}{t} < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{t+1} < \frac{\ln(1+t)-\ln 1}{(1+t)-1} < 1$ **(2)**

Θεωρούμε $g(u) = \ln u,\ u \in [1, t+1],\ t > 0$

Για την g ισχύει το *Θ.Μ.Τ.* στο $[1, t+1]$, άρα υπάρχει $\xi \in (1, t+1)$ τέτοιο ώστε να ισχύει :

$g'(\xi) = \frac{\ln(t+1)-\ln 1}{(t+1)-1} \Leftrightarrow \frac{1}{\xi} = \frac{\ln(t+1)-\ln 1}{(t+1)-1}$. Επομένως η **(2)** ισοδύναμα γίνεται:

$\frac{1}{t+1} < \frac{1}{\xi} < 1 \Leftrightarrow t+1 > \xi > 1$ ή $t+1 \rangle \xi \rangle 1$ που ισχύει, αφού $\xi \in (1, t+1)$

iv. Το εμβαδό θα ισούται με $E = \int_0^1 |f(x) - x| dx = \int_0^1 |x + \ln(1+e^{-x}) - x| dx = \int_0^1 \ln(1+e^{-x}) dx$

Από το ερώτημα **(γ)** έχουμε ότι $\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} < \ln(1+e^{-x}) < e^{-x}$ άρα

$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} dx < \int_0^1 \ln(1+e^{-x}) dx < \int_0^1 e^{-x} dx$ **(3)**

Είναι: $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1} dx = \int_0^1 \frac{-(e^{-x}+1)'}{e^{-x}+1} dx = -\left[\ln(e^{-x}+1)\right]_0^1 =$

$= -\ln(e^{-1}+1) + \ln(e^0+1) = \ln 2 - \ln(e^{-1}+1) = \ln \frac{2}{1+e^{-1}}$

Επίσης: $\int_0^1 e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_0^1 = -e^{-1} + e^0 = 1 - e^{-1}$ και $\int_0^1 \ln(1+e^{-x}) dx = E$

Άρα **(3)** $\Leftrightarrow \ln \frac{2}{1+e^{-1}} < E < 1 - e^{-1}$

Θέμα 23ο.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$.

α. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία της.

β. Να δείξετε ότι $0<\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{1}{1+t^2}dt<\ln 2$.

γ. Να δείξετε ότι $\int_0^{\varepsilon\varphi x} \frac{1}{1+t^2}dt=x,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

δ. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$.

(Θέμα 124 Συλλογής Mathematica)

Λύση:

α. Βρίσκουμε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$.

Πρέπει $x+\sqrt{x^2+1}>0$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, διότι $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\geq -x$.

Η $\frac{1}{1+t^2}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε το $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$ παραγωγίσιμο στο $\mathbb{R}$, άρα η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$f'(x)=\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{1+x^2}=\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}(x+\sqrt{x^2+1})}-\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{1+x^2}=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{1+x^2}.$$

Οπότε λύνουμε :

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{1+x^2}=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}-1=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}=1\Leftrightarrow x^2=0\Leftrightarrow x=0$$

$$f'(x)>0\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{1+x^2}>0\overset{1+x^2>0}{\Leftrightarrow}\sqrt{x^2+1}-1>0\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}>1\Leftrightarrow x^2>0\Leftrightarrow x\neq 0$$

Επομένως $f'(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β. Έχουμε $f(0)=0$ και

$$f\left(\frac{3}{4}\right)=\ln\left(\frac{3}{4}+\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+1}\right)-\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{1}{1+t^2}dt=\ln\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\right)-\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{1}{1+t^2}dt=\ln 2-\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{1}{1+t^2}dt.$$

Ακόμα για κάθε $t\in\mathbb{R}$,έχουμε $\frac{1}{t^2+1}>0\Rightarrow\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{1}{1+t^2}dt>0$. Έχουμε $f\left(\frac{3}{4}\right)=\ln 2-\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{1}{1+t^2}dt$.

Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ έχουμε:

$0=f(0)<f\left(\frac{3}{4}\right)=\ln 2-\int_0^{\frac{3}{4}}\frac{1}{1+t^2}dt \Leftrightarrow \int_0^{\frac{3}{4}}\frac{1}{1+t^2}dt<\ln 2$. Επομένως $0<\int_0^{\frac{3}{4}}\frac{1}{1+t^2}dt<\ln 2$.

γ. Θεωρώ $h(x)=\int_0^{\varepsilon\varphi x}\frac{1}{1+t^2}dt$, η $\frac{1}{t^2+1}$ συνεχής στο $\mathbb{R}$, οπότε το $\int_0^x\frac{1}{1+t^2}dt$ παραγωγίσιμο στο $\mathbb{R}$,

άρα η h παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $h'(x)=\frac{1}{1+\varepsilon\phi^2x}(\varepsilon\phi x)'=\frac{1}{1+\varepsilon\phi^2x}\cdot\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}$ $\overset{1+\varepsilon\phi^2x=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2x}}{=}1$.

Συνεπώς $h'(x)=1\Rightarrow h(x)=x+c$. Όμως $h(0)=\int_0^0\frac{1}{1+t^2}dt=0$, οπότε για $x=0$ έχουμε $c=0$,άρα

$h(x)=x\Leftrightarrow\int_0^{\varepsilon\varphi x}\frac{1}{1+t^2}dt=x$.

δ. Έχουμε για $x=\frac{\pi}{4}$ ότι $\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{4}$.

Έχουμε $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[0,+\infty)$, οπότε :

$$E=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1(x)'f(x)dx=\left[xf(x)\right]_0^1-\int_0^1 xf'(x)dx=f(1)-\int_0^1 x\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=$$

$$=f(1)-\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=f(1)-\left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1+\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_0^1=$$

$$f(1)-\sqrt{2}+1+\frac{1}{2}\ln 2=\ln(1+\sqrt{2})-\int_0^1\frac{1}{1+t^2}dt-\sqrt{2}+1+\frac{1}{2}\ln 2=$$

$$=\ln(1+\sqrt{2})-\frac{\pi}{4}-\sqrt{2}+1+\frac{1}{2}\ln 2\ \tau.\mu.$$

Θέμα 24ο.

Έστω η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f'(\alpha)=f'(\beta)=0$ και $f(\alpha)<f(\beta)$.

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}, & \alpha<x\le\beta\\ 0 & , x=\alpha\end{cases}$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

β. Να δείξετε ότι η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(\alpha,\beta]$ με $g'(\beta)<0$.

γ.i. Αν $g(x)>g(\beta)>0$, να δείξετε ότι η $g(x)$ παίρνει μέγιστη τιμή σε ένα εσωτερικό σημείο του διαστήματος $[\alpha,\beta]$.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει: $f'(\xi)=\dfrac{f(\xi)-f(\alpha)}{\xi-\alpha}$.

δ. Αν $0<\mu<\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$f(\xi)-f(\alpha)=\mu\cdot(\xi-\alpha)$

ε. Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο διάστημα (α,β) να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Λύση:

α. Η g είναι συνεχής στο $(\alpha,\beta]$ ως πηλίκο των συνεχών : $f(x)-f(\alpha)$ και $x-\alpha$.

Στο $x=\alpha$ εξετάζουμε τη συνέχεια με τον ορισμό.

$\lim\limits_{x\to\alpha+}g(x)=\lim\limits_{x\to\alpha+}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=f'(\alpha)=0=g(\alpha)$. Άρα g συνεχής στο $x=\alpha$.

Επομένως η g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.

β. Η g είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων , με

$g'(x)=\dfrac{f'(x)(x-\alpha)-f(x)+f(\alpha)}{(x-\alpha)^2}$.

Στο $x=\beta$: $\lim\limits_{x\to\beta^-}\dfrac{g(x)-g(\beta)}{x-\beta}=\lim\limits_{x\to\beta^-}\dfrac{\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}}{x-\beta}\underset{\text{DLH}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to\beta^-}\dfrac{\left(\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right)'}{(x-\beta)'}=$

$$= \lim_{x\to\beta^-} \frac{f'(x)(x-\alpha)-f(x)+f(\alpha)}{(x-\alpha)^2} = \frac{f'(\beta)(\beta-\alpha)-f(\beta)+f(\beta)}{(\beta-\alpha)^2} = -\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{(\beta-\alpha)^2} < 0$$

Άρα g παραγωγίσιμη στο $x=\beta$ με $g'(\beta)<0$.

γ. Επειδή g συνεχής στο κλειστό $[\alpha,\beta]$ από *θεώρημα Μέγιστης – Ελάχιστης τιμής*, θα παίρνει μέγιστο.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Όμως } g(x) > g(\beta) > 0 \\ \text{και } g(\alpha) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{ Άρα } g(x) > g(\beta) > g(\alpha)$$

Επομένως η g παίρνει μέγιστο σε εσωτερικό σημείο $\xi \in (\alpha,\beta)$.

Επειδή g παραγωγίσιμη στο (α,β) από το *θεώρημα Fermat* έχουμε ότι

$$g'(\xi)=0 \Rightarrow \frac{f'(\xi)(\xi-\alpha)-f(\xi)+f(\alpha)}{(\xi-\alpha)^2}=0 \Rightarrow \frac{f'(\xi)}{\xi-\alpha}=\frac{f(\xi)-f(\alpha)}{(\xi-\alpha)^2} \Rightarrow f'(\xi)=\frac{f(\xi)-f(\alpha)}{\xi-\alpha}$$

δ. Η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του *Θ.Μ.Τ.* στο $[\alpha,\beta]$ οπότε θα υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$

Από την **(1)** έχουμε $f'(\alpha)<\mu<f'(x_0)$ οπότε $g(\alpha)<\mu<g(x_0)$ οπότε από Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών, θα υπάρχει $\xi \in (\alpha,x_0)$ τέτοιο ώστε $g(\xi)=\mu \Rightarrow \dfrac{f(\xi)-f(\alpha)}{\xi-\alpha}=\mu$

ε. Θα δείξουμε ότι αν $x_1<x_2$ τότε $g(x_1)<g(x_2) \Leftrightarrow \dfrac{f(x_1)-f(\alpha)}{x_1-\alpha} < \dfrac{f(x_2)-f(\alpha)}{x_2-\alpha} \Leftrightarrow$

$\overset{\substack{x_1-\alpha>0 \\ x_2-\alpha>0}}{\Leftrightarrow} (x_2-\alpha)(f(x_1)-f(\alpha)) < (x_1-\alpha)(f(x_2)-f(\alpha))$ **(5)**.

Θεωρώ $h(x)=f(x)-f(\alpha)$. Τότε **(5)** $\Leftrightarrow (x_2-\alpha)h(x_1)<(x_1-\alpha)h(x_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_2h(x_1)-\alpha h(x_1)<x_1h(x_2)-\alpha h(x_2)$. Προσθέτουμε και αφαιρούμε το $x_1h(x_1)$ και έχουμε:

$x_2h(x_1)-x_1h(x_1)+x_1h(x_1)+\alpha h(x_2)-\alpha h(x_1)<x_1h(x_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x_2-x_1)h(x_1)+(x_1-\alpha)h(x_1)<(x_1-\alpha)h(x_2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x_2-x_1)h(x_1)<(x_1-\alpha)(h(x_2)-h(x_1))$

πολλαπλασιάζουμε με $\dfrac{1}{(x_2-x_1)(x_1-\alpha)}>0$ και επειδή $h(\alpha)=0$ έχω:

$$\frac{h(x_1)-h(\alpha)}{x_1-\alpha} < \frac{h(x_2)-h(x_1)}{x_2-x_1} \quad \textbf{(6)}$$

Εφαρμόζουμε το *Θ.Μ.Τ.* για την h στα διαστήματα $[\alpha, x_1]$ και $[x_1, x_2]$

- Στο $[\alpha, x_1]$

Υπάρχει $\xi_1 \in (\alpha, x_1)$ τέτοιο ώστε $h'(\xi_1) = \dfrac{h(x_1) - h(\alpha)}{x_1 - \alpha}$,

- Στο $[x_1, x_2]$

Υπάρχει $\xi_2 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε: $h'(\xi_2) = \dfrac{h(x_2) - h(x_1)}{x_2 - x_1}$

Έτσι, η **(6)** ισοδύναμα δίνει: $h'(\xi_1) < h'(\xi_2)$ που ισχύει διότι $\xi_1 < \xi_2$ και $h'(x) = f'(x)$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) αφού f κυρτή στο (α, β).

Θέμα 25ο.

α. **i.** Να αποδείξετε ότι ο αριθμός u είναι πραγματικός, αν και μόνο αν $u=\bar{u}$

ii. Αν $|z|=|w|=1$, τοτε να αποδείξετε ο αριθμός $\frac{z+w}{1+z\cdot w}$ είναι πραγματικός.

β. Μεταξύ όλων των μιγαδικών Z που ικανοποιούν τη σχέση $|z-2i|\le 1$, να βρείτε:

i. ποιος έχει το ελάχιστο και ποιος το μέγιστο δυνατό μέτρο.

ii. για ποιον από όλους η παράσταση $|z+2-2i|$ παίρνει τη μέγιστη δυνατή τιμή.

Λύση:

α.i. α) Ευθύ:

Έστω ότι $u=x+yi$

Τότε $u\in\mathbb{R}\Rightarrow u=x+0i\Rightarrow \bar{u}=x-0i\Rightarrow u=\bar{u}$

β) Αντίστροφο

Έστω $u=\bar{u}\Rightarrow x+yi=x-yi\Rightarrow 2yi=0\Rightarrow y=0\Rightarrow u\in\mathbb{R}$

ii. Έστω $u=\frac{z+w}{1+z\cdot w}$. Επειδή $|z|=|w|=1$, έχουμε: $|z|=1\Rightarrow |z|^2=1\Rightarrow z\cdot\bar{z}=1\Rightarrow \bar{z}=\frac{1}{z}$ και

$|w|=1\Rightarrow |w|^2=1\Rightarrow w\cdot\bar{w}=1\Rightarrow \bar{w}=\frac{1}{w}$

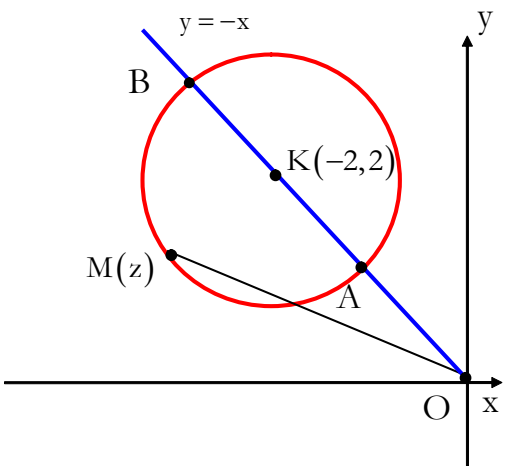
Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\bar{u}=u$

$$\bar{u}=\left(\overline{\frac{z+w}{1+z\cdot w}}\right)=\frac{\bar{z}+\bar{w}}{1+\bar{z}\cdot\bar{w}}=\frac{\frac{1}{z}+\frac{1}{w}}{1+\frac{1}{z\cdot w}}=\frac{\frac{w}{z\cdot w}+\frac{z}{z\cdot w}}{\frac{z\cdot w}{z\cdot w}+\frac{1}{z\cdot w}}=\frac{\frac{z+w}{z\cdot w}}{\frac{1+z\cdot w}{z\cdot w}}=\frac{z+w}{1+z\cdot w}=u$$

β.i. Οι μιγαδικοί z που ικανοποιούν τη σχέση $|z-2i|<1$, ανήκουν σε κυκλικό δίσκο με κέντρο $K(0,2)$ και ακτίνα $\rho=1$. Οπότε η διάκεντρος (που είναι και φορέας και των ζητούμενων μιγαδικών) είναι ο άξονας yy', και τα σημεία τομής με τους άξονες είναι τα $A(0,1)$ και $B(0,3)$. Οπότε οι ζητούμενοι μιγαδικοί είναι οι $z_1=0+i$ με μέτρο 1 και ο $z_2=0+3i$ με μέτρο 3.

ii. Η εξίσωση $|z+2-2i|=1\Rightarrow |z-(2+2i)|=1$ επαληθεύεται μόνο από τους μιγαδικούς z που έχουν την ιδιότητα οι εικόνες τους να απέχουν από την εικόνα του μιγαδικού $-2+2i$, δηλαδή από το σημείο $K(-2,2)$, απόσταση 1 μονάδα. Επομένως, η εξίσωση αυτή είναι εξίσωση κύκλου με κέντρο το σημείο $K(2,-2)$ και ακτίνα $\rho=1$.

Το $|z|$ είναι η απόσταση της εικόνας $M(z)$ από την αρχή $O(0,0)$, δηλαδή το μήκος OM. Από τη Γεωμετρία, όμως, γνωρίζουμε ότι αν η ευθεία K τέμνει τον κύκλο στα A και B, τότε $(OA) \le (OM) \le (OB)$, που σημαίνει ότι η μέγιστη τιμή του $|z|$ είναι το μήκος (OB) και η ελάχιστη το μήκος (OA).



Η εξίσωση, όμως, της ευθείας OK είναι η $y = x$. Επομένως, οι συντεταγμένες των σημείων A και B θα είναι οι λύσεις του συστήματος $\begin{cases} (x+2)^2 + (y-2)^2 = 1 \\ y = -x \end{cases}$ που είναι τα ζεύγη $(-1,1)$ και $(3,-3)$. Άρα, η μέγιστη τιμή του $|z|$ είναι ίση με $(OB) = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$ και η ελάχιστη ίση με $(OA) = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.

Θέμα 26ο.

Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x)+5f(x)+x=0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

α. Να προσδιορίσετε το πρόσημο της συνάρτησης f

β. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται

γ. Με δεδομένη την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=x^3+5x$, να δείξετε ότι η f έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και να ορίσετε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}

δ. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

ε. Να αποδείξετε ότι η f για κάθε $x_0\in\mathbb{R}$ ισχύει $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

στ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x-19)=x+1$

ζ. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f^{-1}(x)}{\eta\mu x}$

Λύση:

α. Ισχύει ότι $f(x)\left(f^2(x)+5\right)=-x$, $x\in\mathbb{R}$ άρα επειδή $f^2(x)+5>0$ θα είναι και

$f(x)=-\dfrac{x}{f^2(x)+5}$ **(1)** από όπου για $x<0$ έχουμε $f(x)>0$ και για $x>0$ έχουμε $f(x)<0$.

β. Αν για $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x_1)=f(x_2)$ τότε θα ισχύουν και $f^3(x_1)=f^3(x_2)$, $5f(x_1)=5f(x_2)$ και με πρόσθεση ότι $f^3(x_1)+5f(x_1)=f^3(x_2)+5f(x_2)$ άρα και $-x_1=-x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα η f είναι '1-1'.

γ. Αν $g(x)=x^3+5x$, $x\in\mathbb{R}$ ισχύουν ότι είναι συνεχής και γνήσια αύξουσα αφού για $x_1<x_2$ ισχύουν ότι $x_1^3<x_2^3$ άρα και $x_1^3+5x_1<x_2^3+5x_2$ άρα και $g(x_1)<g(x_2)$ και έχει επίσης

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+5x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3\right)=+\infty$ και

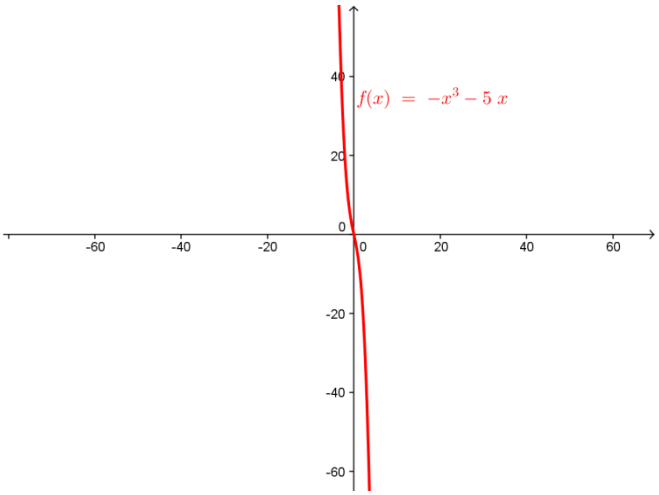
$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+5x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3\right)=-\infty$

άρα έχει σύνολο τιμών $g(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και αφού ισχύει $g(f(x))=-x$, $x\in\mathbb{R}$ και g αντιστρέψιμη με $g^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ θα ισχύει $f(x)=g^{-1}(-x)$, $x\in\mathbb{R}$ επομένως η f θα έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ οπότε θα είναι $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και για x το $f^{-1}(x)$ από την αρχική θα ισχύει

$f^3\left(f^{-1}(x)\right)+5f\left(f^{-1}(x)\right)+f^{-1}(x)=0$ άρα $f^{-1}(x)=-x^3-5x$, $x\in\mathbb{R}$.

Β' Τρόπος: (Για την μονοτονία της g)

Η $g(x)=x^3+5x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ σαν πολυωνυμική με $g'(x)=\left(x^3+5x\right)'=3x^2+5>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της



δ. Από $g(f(x))=-x$, $x\in\mathbb{R}$ για $x_1<x_2$ ισχύει $-x_1>-x_2$ άρα και $g(f(x_1))>g(f(x_2))$ και επειδή η g γνήσια αύξουσα θα ισχύει ότι $f(x_1)>f(x_2)$ άρα η f είναι γνήσια φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ε. Για $x=x_0$ στην αρχική προκύπτει ότι $f^3(x_0)+5f(x_0)=-x_0$ οπότε με αφαίρεση κατά μέλη έχουμε

ότι $f^3(x)-f^3(x_0)+5(f(x)-f(x_0))=-x+x_0$ ή ακόμη

$(f(x)-f(x_0))(f^2(x)+f(x)f(x_0)+f^2(x_0)+5)=-(x-x_0)$ οπότε

και $f(x)-f(x_0)=-\dfrac{x-x_0}{\left(f(x)+\frac{1}{2}f(x_0)\right)^4+\frac{3}{4}f^2(x_0)+5}$ και επειδή

$$|f(x)-f(x_0)|=\left|-\frac{x-x_0}{\left(f(x)+\frac{1}{2}f(x_0)\right)^4+\frac{3}{4}f^2(x_0)+5}\right|\le\frac{|x-x_0|}{5}$$ άρα θα ισχύει

$$-\frac{|x-x_0|}{5}\le f(x)-f(x_0)\le\frac{|x-x_0|}{5}$$ και επειδή $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{|x-x_0|}{5}=0$ από κριτήριο παρεμβολής

$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0))=0$ άρα $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)-f(x_0)=0\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$

στ. Είναι $f(x-19)=x+1\Leftrightarrow x-19=f^{-1}(x+1)$ ισοδύναμα λόγω **(γ.)**

$x-19=-(x+1)^3-5(x+1)\Leftrightarrow(x+1)^3+6(x+1)-20=0$ και με Horner προκύπτει ισοδύναμα ότι

$x+1=2\Leftrightarrow x=1$ ή $(x+1)^2+2(x+1)+10=0$ που είναι αδύνατο.

ζ. Είναι $h(x)=\dfrac{f^{-1}(x)}{\eta\mu x}=\dfrac{-x^3-5x}{\eta\mu x}\overset{x\neq0}{=}\dfrac{-x^2-5}{\frac{\eta\mu x}{x}}$ οπότε $\lim\limits_{x\to0}h(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{-x^2-5}{\frac{\eta\mu x}{x}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to0}(-x^2-5)}{\lim\limits_{x\to0}\frac{\eta\mu x}{x}}=\dfrac{0-5}{1}=-5$

Θέμα 27ο.

Δίνεται η συνάρτηση f με f'' συνεχής στο $\mathbb{R}$, τέτοια ώστε να ισχύουν
$\int_0^x \left(t^2+1\right)f''(t)\,dt = 2\int_x^0 tf'(t)\,dt - 4\int_0^1 xtf(x)\,dt$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, με $f(0)=0$ και $f'(0)=2$

α. Να δείξετε ότι $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β. Έστω $E(\alpha)$ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον xx' και τις ευθείες $x=0$ και $x=\alpha$, $\alpha>0$. Αν το α μεταβάλλεται με ρυθμό $10\,{}^{cm}\!/_{sec}$, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του $E(\alpha)$, τη στιγμή κατά την οποία $\alpha=3cm$.

γ. Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση g με $\left|g(x)+x-2\right|\le\left|f(x)\right|$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι η ευθεία $y=-x+2$ είναι ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

ii. Αν Ε το εμβαδόν που περικλείεται από τη C_g, τη πλάγια ασύμπτωτη της στο $+\infty$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=2$, να δείξετε ότι $E\le\ln 5$

Λύση:

α. $\int_0^x \left(t^2+1\right)f''(t)\,dt = 2\int_x^0 tf'(t)\,dt - 4\int_0^1 xtf(x)\,dt \Rightarrow$

$\int_0^x \left(t^2+1\right)f''(t)\,dt = -2\int_0^x tf'(t)\,dt - 4xf(x)\int_0^1 t\,dt \Rightarrow$

$\int_0^x \left(t^2+1\right)f''(t)\,dt = -2\int_0^x tf'(t)\,dt - 4xf(x)\left[\dfrac{t^2}{2}\right]_0^1 \Rightarrow$

$\int_0^x \left(t^2+1\right)f''(t)\,dt = -2\int_0^x tf'(t)\,dt - 4xf(x)\dfrac{1}{2} \Rightarrow$

$\int_0^x \left(t^2+1\right)f''(t)\,dt = -2\int_0^x tf'(t)\,dt - 2xf(x)$. Παραγωγίζω τη σχέση και έχω:

$\left(x^2+1\right)f''(x) = -2xf'(x) - 2f(x) - 2xf'(x) \Rightarrow \left(x^2+1\right)f''(x) + 2xf'(x) = -2\left(f(x)+xf'(x)\right) \Rightarrow$

$\left(x^2+1\right)f''(x) + \left(x^2+1\right)'f'(x) = -2\left(x'\cdot f(x) + x\cdot f'(x)\right) \Rightarrow$

$\left(\left(x^2+1\right)f'(x)\right)' = -2\left(x\cdot f(x)\right)' \Rightarrow \left(x^2+1\right)f'(x) = -2x\cdot f(x) + c_1$

Για $x=0$ έχουμε $\left(0^2+1\right)f'(0) = -2\cdot 0\cdot f(0) + c_1 \Rightarrow c_1 = 2$. Άρα $\left(x^2+1\right)f'(x) = -2x\cdot f(x) + 2$. Οπότε

$\left(x^2+1\right)f'(x) + 2x\cdot f(x) = 2 \Rightarrow \left(x^2+1\right)f'(x) + \left(x^2+1\right)'\cdot f(x) = 2 \Rightarrow \left(\left(x^2+1\right)f(x)\right)' = (2x)' \Rightarrow$

$\left(x^2+1\right)f(x) = 2x + c_2$.

Για $x=0$ έχουμε $\left(0^2+1\right)f\left(0\right)=2\cdot 0+c_2\Rightarrow c_2=0$. Άρα $\left(x^2+1\right)f\left(x\right)=2x\Rightarrow f\left(x\right)=\dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)}$

β. Έχουμε ότι $E(\alpha)=\int_0^{\alpha}\left|f\left(x\right)\right|dx$. Όμως $f\left(x\right)=0$ όταν $x=0$, και για $x>0$, $f\left(x\right)>0$. Οπότε

$E(\alpha)=\int_0^{\alpha}f\left(x\right)dx\Rightarrow E(\alpha)=\int_0^{\alpha}\dfrac{2x}{x^2+1}dx\Rightarrow E(\alpha)=\int_0^{\alpha}\dfrac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}dx\Rightarrow E(\alpha)=\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^{\alpha}\Rightarrow$

$E(\alpha)=\ln\left(\alpha^2+1\right)$. Όμως το α μεταβάλλεται σε σχέση με το χρόνο, συνεπώς είναι συνάρτηση του t, οπότε το εμβαδό γράφεται $E\left(\alpha\left(t\right)\right)=\ln\left(\alpha^2\left(t\right)+1\right)$.

Έτσι $\left(E\left(\alpha\left(t\right)\right)\right)'=\left(\ln\left(\alpha^2\left(t\right)+1\right)\right)'=\dfrac{1}{\alpha^2\left(t\right)+1}\cdot 2\alpha\left(t\right)\cdot\alpha'\left(t\right)$.

Τη στιγμή t_0, έχουμε $\alpha\left(t_0\right)=3cm$ και $\alpha'\left(t_0\right)=10\,cm/sec$. Άρα

$E'\left(t\right)=\dfrac{1}{3^2+1}\cdot 2\cdot 3\cdot 10\,cm^2/sec=6\,cm^2/sec$.

γ.i. Έχουμε ότι $\left|g\left(x\right)+x-2\right|\le\left|f\left(x\right)\right|\Rightarrow\left|g\left(x\right)-\left(-x+2\right)\right|\le\left|f\left(x\right)\right|\Rightarrow-\left|f\left(x\right)\right|\le g\left(x\right)-\left(-x+2\right)\le\left|f\left(x\right)\right|$.

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\left|f\left(x\right)\right|=\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\dfrac{2x}{x^2+1}\right|=\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\dfrac{2x}{x^2}\right|=0$, οπότε από κριτήριο παρεμβολής,

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(g\left(x\right)-\left(-x+2\right)\right)=0$. Άρα η ευθεία $y=-x+2$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$.

ii. $E=\int_0^2\left|g\left(x\right)+x-2\right|\le\int_0^2\left|f\left(x\right)\right|dx=\int_0^2\dfrac{2x}{x^2+1}dx=\int_0^2\dfrac{\left(x^2+1\right)'}{x^2+1}dx=\left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^2=\ln 5-\ln 1=\ln 5$.

Άρα $E\le\ln 5$

Θέμα 28ο.

Έστω $z\in\mathbb{C}$ και η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{|z-1|x^3-|z-2|x}{x-1}$, $x\in(1,+\infty)$,τέτοια ώστε το όριο $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$ να υπάρχει και να είναι πραγματικός.

Να αποδείξετε ότι:

α. i. $|z-1|=|z-2|$.

ii. ο μιγαδικός z, που έχει το ελάχιστο μέτρο είναι ο $\dfrac{3}{2}$.

β. i. η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

ii. η συνάρτηση f παίρνει την τιμή $2012\cdot|z-1|$.

γ. Αν επιπλέον η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases}f(x) & ,x>1\\ 4 & ,x=1\\ \dfrac{4\eta\mu(x-1)}{x-1} & ,x<1\end{cases}$ είναι συνεχής στο 1, να αποδείξετε ότι:

i. το πεδίο ορισμού της f^{-1} είναι το διάστημα $(4,+\infty)$.

ii. $z=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{15}}{2}i$ ή $z=\dfrac{3}{2}-\dfrac{\sqrt{15}}{2}i$

Λύση:

α.i. Επειδή $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to1^+}(x-1)=0$ αν $\lim\limits_{x\to1^+}|z-1|x^3-|z-2|x\neq0\Rightarrow\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$ ή $-\infty$ (που απορρίπτεται, αφού το όριο υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός), οπότε $\lim\limits_{x\to1^+}|z-1|x^3-|z-2|x=0\Rightarrow|z-1|=|z-2|$

ii. Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων $M(z)$ πάνω στο μιγαδικό επίπεδο είναι η μεσοκάθετος του ευθύγραμμου τμήματος AB, όπου $A(1,0)$, $B(2,0)$.

Άρα η εξίσωση είναι $x=\dfrac{3}{2}$ όπου $z=\dfrac{3}{2}+yi$, $y\in\mathbb{R}$, άρα η εικόνα του μιγαδικού z που έχει ελάχιστο μέτρο, είναι το σημείο $\Gamma\left(\dfrac{3}{2},0\right)$ που αντιστοιχεί στο μιγαδικό $z=\dfrac{3}{2}$.

Οπότε η συνάρτηση γίνεται $f(x)=\dfrac{|z-1|x^3-|z-1|x}{x-1}=\dfrac{|z-1|\left(x^3-x\right)}{x-1}=|z-1|x(x+1)$, $x\in(1,+\infty)$, όπου όπου $z=\dfrac{3}{2}+yi$, $y\in\mathbb{R}$.

β.i. Για κάθε $x>1$ έχουμε, $f'(x)=|z-1|\cdot x+|z-1|\cdot(x+1)=|z-1|\cdot(2x+1)>0$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$.

ii. Αναζητούμε ένα $x_0\in(1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=2012\cdot|z-1|$, οπότε έχουμε διαδοχικά:

$$f(x_0)=2012\cdot|z-1|\Leftrightarrow|z-1|\cdot x_0\cdot(x_0+1)=2012\cdot|z-1|\Leftrightarrow x_0^2+x_0-2012=0 \text{ με } \Delta=1+4\cdot2012>0$$

και επειδή $P=x_1\cdot x_2=-2012<0$, άρα οι λύσεις είναι ετερόσημες, οπότε η αρνητική λύση απορρίπτεται λόγω πεδίο ορισμού της συνάρτησης f (και η άλλη είναι δεκτή αφού είναι μεγαλύτερη της μονάδας - προκύπτει με πολλούς τρόπους), άρα υπάρχει μοναδικό $x_0\in(1,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=2012\cdot|z-1|$

Β' τρόπος: Προκύπτει εύκολα και από την εύρεση του συνόλου τιμών της f όπως θα δούμε στο παρακάτω ερώτημα.

γ. Για να είναι συνεχής η g στο σημείο $x_0=1$ πρέπει:

$$\lim_{x\to1^+}g(x)=g(1)\Rightarrow\lim_{x\to1^+}f(x)=4\Rightarrow\lim_{x\to1^+}\left[|z-1|\cdot x\cdot(x+1)\right]=4\Rightarrow2|z-1|=4\Rightarrow|z-1|=2=|z-2|$$

(δεν χρειάζεται να πάρουμε τον κλάδο για $x<1$, αν και το όριο βγαίνει πάλι 4, από συνέχεια - οπότε είναι περιττό)

Άρα η συνάρτηση f γίνεται: $f(x)=2\cdot x\cdot(x+1)=2x^2+2x,\ x\in(1,+\infty)$.

Εύρεση συνόλου τιμών της f.

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$ και $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=4$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(2x^2)=+\infty$

Σημείωση: Από εδώ φαίνεται ότι το 2012 ανήκει στο σύνολο τιμών της f και επειδή είναι γνησίως μονότονη, το σημείο αυτό είναι μοναδικό.

Άρα, $f(\Delta)=(4,+\infty)$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, είναι 1-1, άρα αντιστρέφεται με $D_{f^{-1}}=(4,+\infty)$.

ii. Έχουμε: $|z-1|=2\Leftrightarrow\left|\frac{3}{2}+yi-1\right|=2\Leftrightarrow\sqrt{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2+y^2}=2\Leftrightarrow y^2=\frac{15}{4}\Leftrightarrow y=\frac{\sqrt{15}}{2}$ ή $y=-\frac{\sqrt{15}}{2}$

οπότε οι ζητούμενοι μιγαδικοί είναι: $z=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{15}}{2}i$ ή or $z=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{15}}{2}i$.

Θέμα 29ο.

α. Αν οι συναρτήσεις f , g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι ¨1-1¨, να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $f\circ g$ είναι ¨1-1¨.

β. Αν η συνάρτηση f, ορισμένη στο $\mathbb{R}$, είναι ¨1-1¨, να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $h(x)=\left[f(x)\right]^3+2f(x)-3$ είναι ¨1-1¨.

γ. Έστω η συνάρτηση $h(x)=e^{3g(x)}+2e^{g(x)}-3$, όπου g συνάρτηση ¨1-1¨ ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Αν η γραφική παράσταση της g διέρχεται από την αρχή των αξόνων και $g(2)=\ln 2$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση της h και ότι $h^{-1}(0)=0$ και $h^{-1}(9)=2$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $h\left(-2+h^{-1}\left(x^2-8x\right)\right)=0$.

Λύση:

α. Έστω $x_1,x_2\in D_{f\circ g}$ με $f\left(g(x_1)\right)=f\left(g(x_2)\right)$. Τότε, αφού η f είναι "$1-1$" θα έχουμε $g(x_2)=g(x_2)\overset{g\text{"1–1"}}{\Rightarrow} x_1=x_2$. Άρα και η συνάρτηση $f\circ g$ είναι ¨1-1¨.

β. Θεωρώ τη συνάρτηση g με $g(x)=x^3+2x-3$. Αν αποδείξω ότι η g είναι "$1-1$", τότε και αφού η f είναι "$1-1$", από το **(α)** ερώτημα, και η σύνθεση τους $(g\circ f)(x)$ θα είναι "$1-1$".

Έστω $x_1,x_2\in D_g$ με $x_1<x_2$.

Τότε $x_1^3<x_2^3$, οπότε αν προσθέσω κατά μέλη έχουμε

$\oplus\begin{cases}x_1^3<x_2^3\\ x_1<x_2\end{cases}\Rightarrow x_1^3+x_1<x_2^3+x_2\overset{-3}{\Leftrightarrow}x_1^3+x_1-3<x_2^3+x_2-3\Leftrightarrow g(x_1)<g(x_2)$. Οπότε η g είναι γνησίως αύξουσα, άρα και "$1-1$". Αν θεωρήσω σαν $h(x)=(g\circ f)(x)$, τότε η συνάρτηση $h(x)=\left[f(x)\right]^3+2f(x)-3$ είναι ¨1-1¨.

γ. Η συνάρτηση $h(x)=e^{3g(x)}+2e^{g(x)}-3$ είναι σύνθεση των συναρτήσεων $g(x)$, e^x $f(x)=x^3+2x-3$, που κάθε μία είναι "$1-1$", οπότε από προηγούμενο ερώτημα, και η σύνθεση τους $h(x)=e^{3g(x)}+2e^{g(x)}-3$ είναι ¨1-1¨ στο $\mathbb{R}$.

Άρα η $h(x)=e^{3g(x)}+2e^{g(x)}-3$ αντιστρέφεται, δηλαδή υπάρχει η η αντίστροφη συνάρτηση της h.

Αφού η γραφική παράσταση της g διέρχεται από την αρχή των αξόνων και $g(2)=\ln 2$, τότε:

$h(2)=e^{3g(2)}+2e^{g(2)}-3=e^{3\ln 2}+2e^{\ln 2}-3=e^{\ln 2^3}+2e^{\ln 2}-3=2^3+2\cdot 2-3=9$

Οπότε $h(2)=9\Leftrightarrow h^{-1}\left(h(2)\right)=h^{-1}(9)\Leftrightarrow h^{-1}(9)=2$

Ακόμα η γραφική παράσταση της g διέρχεται από την αρχή των αξόνων οπότε $g(0)=0$ και

$h(0)=e^{3g(0)}+2e^{g(0)}-3=e^{3\cdot 0}+2e^{0}-3=1+2-3=0$. Άρα

$h(0)=0 \Leftrightarrow h^{-1}\left(h(0)\right)=h^{-1}(0) \Leftrightarrow h^{-1}(0)=0$

ii. $h\left(-2+h^{-1}\left(x^2-8x\right)\right)=0 \Leftrightarrow h\left(-2+h^{-1}\left(x^2-8x\right)\right)=h(0) \overset{\text{"1-1"}}{\Leftrightarrow} -2+h^{-1}\left(x^2-8x\right)=0 \Leftrightarrow$

$h^{-1}\left(x^2-8x\right)=2 \Leftrightarrow h^{-1}\left(x^2-8x\right)=h^{-1}(9) \overset{h^{-1}\text{"1-1+}}{\Leftrightarrow} x^2-8x=9 \Leftrightarrow x^2-8x-9=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=9 \end{cases}$

Θέμα 30ο.

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα με $f(-1)>0$ και ο μιγαδικός αριθμός $z=\dfrac{f(-1)\cdot f(0)}{2}+\dfrac{4\sqrt{3}}{f(1)}i$, για τον οποίο ισχύει $|z|=\dfrac{z}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)$.Να αποδείξετε ότι ισχύουν:

α. $f(-1)\cdot f(0)\cdot f(1)=8$

β. $2\,\mathrm{Re}(z)=|z|$

γ. $f(-1)<2<f(1)$

δ. $-1<f^{-1}\left(\sqrt{|z|}\right)<0$

Λύση:

α. Έστω $z=x+yi$,με $x,y\in\mathbb{R}$

$$|z|=\frac{z}{2}\left(1-\sqrt{3}i\right)=\frac{x+yi}{2}\left(1-\sqrt{3}i\right)\Leftrightarrow 2|z|=x-\sqrt{3}xi+yi+\sqrt{3}y\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2|z|=x+\sqrt{3}y+i\left(y-\sqrt{3}x\right)$$

Δηλαδή $2|z|=x+\sqrt{3}y$ **(1)** και $y-\sqrt{3}x=0\Leftrightarrow y=\sqrt{3}x$ **(2)** (διότι $|z|$ πραγματικός αριθμός)

Από υπόθεση έχουμε ότι $z=\dfrac{f(-1)\cdot f(0)}{2}+\dfrac{4\sqrt{3}}{f(1)}i$, δηλαδή $x=\dfrac{f(-1)f(0)}{2}$ και $y=\dfrac{4\sqrt{3}}{f(1)}$,με

αντικατάσταση στη σχέση 2 προκύπτει $\dfrac{4\sqrt{3}}{f(1)}=\sqrt{3}\dfrac{f(-1)f(0)}{2}\Leftrightarrow 8=f(1)f(-1)f(0)$

β. Η **(1)** με βάση **(2)** γίνεται $2|z|=x+\sqrt{3}\sqrt{3}x=x+3x=4x\Leftrightarrow|z|=2x\Leftrightarrow|z|=2\,\mathrm{Re}(z)$

γ. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και $f(-1)>0$ οπότε για $-1<0<1$ θα έχουμε
$0<f(-1)<f(0)<f(1)$

Πολλαπλασιάζουμε όλα τα μέλη της ανίσωσης με $f(-1)f(1)$ (θετικοί αριθμοί) και έχουμε:

$$f^2(-1)f(1)<f(-1)f(0)f(1)<f^2(1)f(-1)\Leftrightarrow f^2(-1)f(1)<8<f^2(1)f(-1)\ \textbf{(3)}$$

Όμως $f(-1)<f(1)\Leftrightarrow f^3(-1)<f^2(-1)f(1)$ (πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με τον θετικό αριθμό $f^2(-1)$) , οπότε ο αριθμός $f^3(-1)$ είναι ένα κάτω φράγμα.

Όμοια $f(-1)<f(1)\Leftrightarrow f(-1)f^2(1)<f^3(1)$ (πολλαπλασιάζουμε όλα τα μέλη με τον θετικό αριθμό $f^2(1)$),οπότε ο αριθμός $f^3(1)$ είναι ένα άνω φράγμα.

Επομένως έχουμε $f^3(-1) < f^2(-1)f(1) < 8 < f(-1)f^2(1) < f^3(1)$ δηλαδή $f^3(-1) < 8 < f^3(1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(-1) < 2 < f(1)$

δ. $-1 < f^{-1}\left(\sqrt{|z|}\right) < 0 \Leftrightarrow f(-1) < \sqrt{|z|} < f(0) \Leftrightarrow f^2(-1) < |z| < f^2(1)$

Όμως $|z| = 2\text{Re}(z)$ ή $|z| = 2\dfrac{f(-1)\cdot f(0)}{2}$ ή $|z| = f(0)\cdot f(-1)$

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι: $f^2(-1) < f(0)f(-1) < f^2(0)$, το οποίο ισχύει, διότι

$f(-1) < f(0) \Leftrightarrow f^2(-1) < f(-1)\cdot f(0)$ και $f(-1) < f(0) \Leftrightarrow f(-1)\cdot f(0) < f^2(0)$

Θέμα 31ο.

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί $z \in \mathbb{C}$ για τους οποίους ισχύει $|z-4-4i| = \sqrt{2}$ και $\text{Im}(z) \geq 4$.

α. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αυτών..

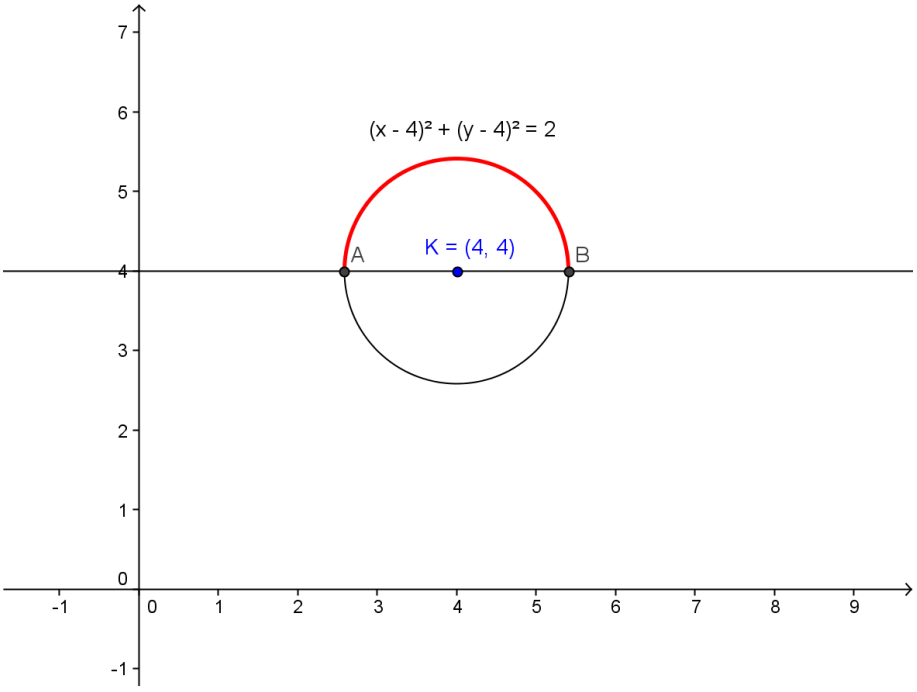
β. Να δείξετε ότι οι εικόνες των παραπάνω μιγαδικών ανήκουν στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 4 + \sqrt{-x^2 + 8x - 14}$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής.

γ. Να βρεθεί ο μιγαδικός του παραπάνω γεωμετρικού τόπου με το μέγιστο μέτρο.

δ. Να γράψετε την εξίσωση εφαπτομένης της παραπάνω συνάρτησης στο σημείο το οποίο είναι η εικόνα του μιγαδικού που βρήκατε στο τρίτο ερώτημα.

Λύση:

α. Η σχέση $|z-4-4i| = \sqrt{2}$ περιγράφει κύκλο κέντρου $K(4,4)$ και ακτίνας $\rho = \sqrt{2}$, με εξίσωση $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 2$. Όμως η σχέση $\text{Im}(z) \geq 4$ περιγράφει τα σημεία του κύκλου με τεταγμένη $y \geq 4$. Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι το ημικύκλιο που βρίσκεται πάνω από την ευθεία $y = 4$, καθώς και τα σημεία τομής του κύκλου με την ευθεία αυτή. (Βλέπε σχήμα 1)



β. Αφού ισχύει ότι $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 2$ και $y \geq 4$, θα έχουμε:

$$(x-4)^2 + (y-4)^2 = 2 \Leftrightarrow (y-4)^2 = 2 - (x-4)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} y - 4 = \sqrt{2-(x-4)^2} \\ y - 4 = -\sqrt{2-(x-4)^2} \end{cases}$$

Άρα $\begin{cases} y-4=\sqrt{2-(x-4)^2} \\ y-4=-\sqrt{2-(x-4)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-4=\sqrt{2-x^2+8x-16} \\ y-4=-\sqrt{2-x^2+8x-16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4+\sqrt{-x^2+8x-14} \\ y=4-\sqrt{-x^2+8x-14} \end{cases}$.

Όμως , άρα θα πρέπει να ισχύει $y=4+\sqrt{-x^2+8x-14}$, οπότε αν θέσουμε σαν $y \to f(x)$, θα έχουμε $f(x)=4+\sqrt{-x^2+8x-14}$. Είναι εύκολο να δούμε, είτε αλγεβρικά, είτε από το σχήμα, ότι η f ορίζεται όταν $x \in \left(4-\sqrt{2},4+\sqrt{2}\right)$, δηλαδή όταν $x \in (x_0-\rho,x_0+\rho)$, όπου (x_0,y_0) οι συντεταγμένες του κέντρου του κύκλου, και ρ η ακτίνα του.

γ. Φέρνουμε την διάκεντρο (θα είναι η ευθεία $y=x$, διότι διέρχεται από το $O(0,0)$ και $K(4,4)$, οπότε ο ζητούμενος μιγαδικός θα είναι το σημείο τομής Μ του ημικυκλίου με την ευθεία αυτή.

Λύνουμε λοιπόν το σύστημα της ευθείας και του ημικυκλίου:

$$\begin{cases} y=4+\sqrt{-x^2+8x-14} \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4+\sqrt{-y^2+8y-14} \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-4=\sqrt{-y^2+8y-14} \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-4)^2=\left(\sqrt{-y^2+8y-14}\right)^2 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-8y+16=-y^2+8y-14 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2-16y+30=0 \\ y=x \end{cases} \Leftrightarrow$$

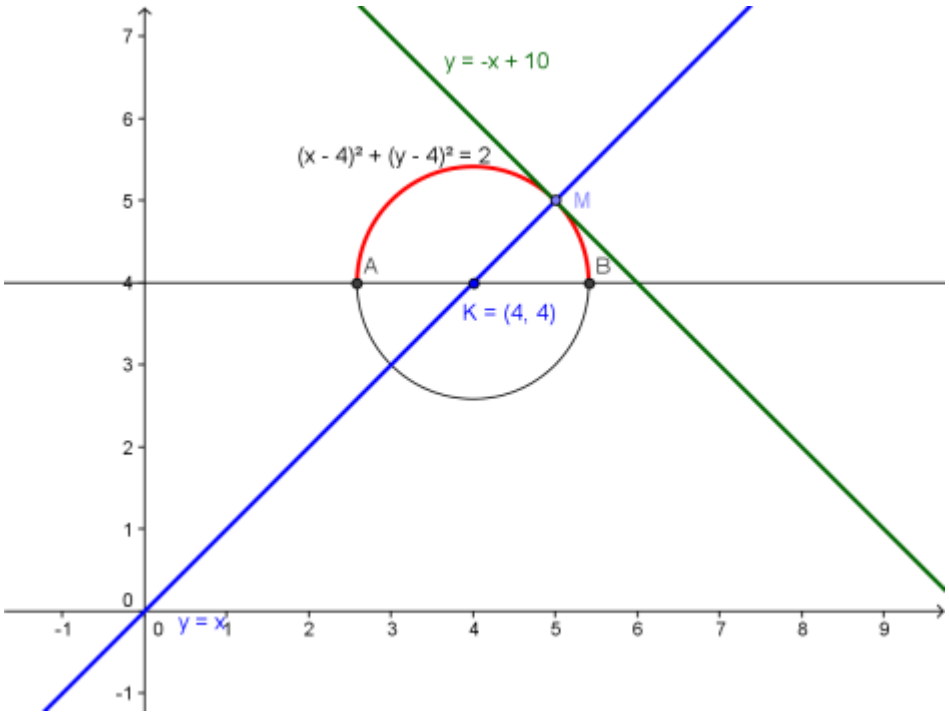
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=5 \\ y=3 \\ y=x \end{cases} \overset{y\geq 4}{\Leftrightarrow} \begin{cases} y=5 \\ x=5 \end{cases}.$$ Οπότε ο μιγαδικός με το μέγιστο μέτρο είναι ο $M=5+5i$

δ. Η f είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της σαν σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $M(5,5)$ θα έχει τύπο $y-f(5)=f'(5)(x-5)$.

Όμως $f'(x)=\left(4+\sqrt{-x^2+8x-14}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{-x^2+8x-14}}\cdot\left(-x^2+8x-14\right)'=\frac{1}{2\sqrt{-x^2+8x-14}}\cdot(-2x+8)$

Οπότε $f'(5)=\frac{1}{2\sqrt{-5^2+8\cdot 5-14}}\cdot(-2\cdot 5+8)=\frac{-2}{2\cdot 1}=-1$

Οπότε η **(ε)** θα έχει τύπο $y-5=-1(x-5) \Leftrightarrow y=-x+10$


y = -x + 10
(x - 4)² + (y - 4)² = 2
M
A
B
K = (4, 4)
y = x
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9

Θέμα 32ο.

Δίνεται συνάρτηση f, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,e]$, με $f(1)=2$, $f(e)=e+1$ και σύνολο τιμών το $[-1,4]$. Να αποδείξετε ότι:

α. Υπάρχουν τουλάχιστον δύο τιμές $x_1,x_2\in(1,e)$, με $x_1\neq x_2$, τέτοια ώστε $f'(x_1)=f'(x_2)=0$

β. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,e)$, τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$

γ. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,e)$, τέτοιο ώστε $f(x_0)\left[f'(x_0)-4f^4(x_0)\right]=x_0$

δ. Η ευθεία $y=-x+e+2$ τέμνει την C_f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη να ανήκει στο διάστημα $(1,e)$

ε. Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,e)$, με $\xi_1\neq\xi_2$, τέτοια ώστε να ισχύει $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=1$

Λύση:

α. Η f είναι συνεχής στο $[1,e]$, από *θεώρημα Μέγιστης-Ελάχιστης τιμής* θα υπάρχουν $x_1,x_2\in[1,e]$ τέτοια ώστε $f(x_1)=m$ και $f(x_2)=M$ όπου m και M η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή αντίστοιχα. Η f έχει σύνολο τιμών το $[-1,4]$ και $f(1)=2$, $f(e)=e+1$ οπότε $f(x_1)<f(1)<f(e)<f(x_2)$, επομένως x_1,x_2 δεν είναι άκρα του διαστήματος $[1,e]$. Άρα $x_1,x_2\in(1,e)$ και επειδή η f λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή σε αυτά, από *θεώρημα Fermat* έχουμε ότι $f'(x_1)=f'(x_2)=0$

β. Η f' είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]\subset[1,e]$ και παραγωγίσιμη στο $(x_1,x_2)\subset[1,e]$ και από α. $f'(x_1)=f'(x_2)$. Από *Θ.Rolle* θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,e)$, τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)\left[f'(x)-4f^4(x)\right]-x$ συνεχή στο $[1,e]$ ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, άρα και στο $(x_1,x_2)\subset[1,e]$. Επίσης,

$$g(x_1)=f(x_1)\left[f'(x_1)-4f^4(x_1)\right]-x_1=4\left[0-4\cdot4^4\right]-x_1=-4^6-x_1<0$$
$$g(x_2)=f(x_2)\left[f'(x_2)-4f^4(x_2)\right]-x_2=(-1)\left[0-4(-1)^4\right]-x_2=4-x_2>0$$

Από *Θ. Bolzano* υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,e)$, τέτοιο ώστε

$$g(x_0)=0\Rightarrow f(x_0)\left[f'(x_0)-4f^4(x_0)\right]-x_0\Rightarrow f(x_0)\left[f'(x_0)-4f^4(x_0)\right]=x_0$$

δ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-(-x+e+2)=f(x)+x-e-2$ συνεχή στο $[1,e]$ ως πράξεις και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Επίσης,

$$h(1)=f(1)+1-e-2=2+1-e-2=-e+1<0 \text{ και } h(e)=f(e)+e-e-2=e+1-2=e-1>0$$

Από *Θ. Bolzano* υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_3\in(1,e)$, τέτοιο ώστε

$h(x_3)=0 \Rightarrow f(x_3)+x_3-e-2 \Rightarrow f(x_3)=-x_3+e+2$, δηλαδή η ευθεία $y=-x+e+2$ τέμνει την C_f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη να ανήκει στο διάστημα $(1,e)$

ε. Αφού η f είναι συνεχής στο $[1,e]$ (όπως στο α.) και παραγωγίσιμη στο $(1,e)$. Άρα θα ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του *Θ.Μ.Τ.* στο $[1,e]$, συνεπώς και στα υποδιαστήματα αυτού $[1,x_3],[x_3,e]$, όπου x_3 από το δ. Από το πρώτο διάστημα συμπεραίνουμε ότι θα υπάρχει $\xi_1 \in (1,x_3) \subseteq (1,e)$ με

$f'(\xi_1)=\dfrac{f(x_3)-f(1)}{x_3-1}=\dfrac{-x_3+e+2-2}{x_3-1}=\dfrac{-x_3+e}{x_3-1}$ και από το δεύτερο ότι θα υπάρχει $\xi_2 \in (x_3,e) \subseteq (1,e)$ με

$f'(\xi_2)=\dfrac{f(e)-f(x_3)}{e-x_3}=\dfrac{e+1+x_3-e-2}{e-x_3}=\dfrac{x_3-1}{-x_3+e}$.

Άρα $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=\dfrac{-x_3+e}{x_3-1}\cdot\dfrac{x_3-1}{-x_3+e}=1$ με $\xi_1,\xi_2 \in (1,e)$ και $\xi_1 \neq \xi_2$ (αφού $(1,x_3)\cap(x_3,e)=\varnothing$)

Θέμα 33ο.

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα με $f(-1)>0$ και ο μιγαδικός αριθμός $z=\dfrac{f(-1)\cdot f(0)}{2}+\dfrac{4\sqrt{3}}{f(1)}i$, για τον οποίο ισχύει $|z|=\dfrac{z}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)$.

Να αποδείξετε ότι ισχύουν:

α. $f(-1)\cdot f(0)\cdot f(1)=8$

β. $2\mathrm{Re}(z)=|z|$

γ. $f(-1)<2<f(1)$

δ. $-1<f^{-1}\left(\sqrt{|z|}\right)<0$

Λύση:

α. Έστω $z=x+yi$, με $x,y\in\mathbb{R}$

$$|z|=\frac{z}{2}\left(1-\sqrt{3}i\right)=\frac{x+yi}{2}\left(1-\sqrt{3}i\right)\Leftrightarrow 2|z|=x-\sqrt{3}xi+yi+\sqrt{3}y\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2|z|=x+\sqrt{3}y+i\left(y-\sqrt{3}x\right)$$

Δηλαδή $2|z|=x+\sqrt{3}y$ **(1)** και $y-\sqrt{3}x=0\Leftrightarrow y=\sqrt{3}x$ **(2)** (διότι $|z|$ πραγματικός αριθμός)

Από υπόθεση έχουμε ότι $z=\dfrac{f(-1)\cdot f(0)}{2}+\dfrac{4\sqrt{3}}{f(1)}i$, δηλαδή $x=\dfrac{f(-1)\cdot f(0)}{2}$ και $y=\dfrac{4\sqrt{3}}{f(1)}$.

Με αντικατάσταση στη **(2)** προκύπτει $\dfrac{4\sqrt{3}}{f(1)}=\sqrt{3}\dfrac{f(-1)f(0)}{2}\Leftrightarrow 8=f(1)f(-1)f(0)$

β. Η **(1)** με βάση τη **(2)** γίνεται $2|z|=x+\sqrt{3}\sqrt{3}x=x+3x=4x\Leftrightarrow|z|=2x\Leftrightarrow|z|=2\mathrm{Re}(z)$

γ. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και $f(-1)>0$ οπότε για $-1<0<1$ θα έχουμε $0<f(-1)<f(0)<f(1)$.

Πολλαπλασιάζουμε όλα τα μέλη της ανίσωσης με $f(-1)f(1)$ (θετικοί αριθμοί) και έχουμε:

$$f^2(-1)f(1)<f(-1)f(0)f(1)<f^2(1)f(-1)\Leftrightarrow f^2(-1)f(1)<8<f^2(1)f(-1)\ \textbf{(3)}$$

Όμως $f(-1)<f(1)\Leftrightarrow f^3(-1)<f^2(-1)f(1)$ (πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με τον θετικό αριθμό $f^2(-1)$) , οπότε ο αριθμός $f^3(-1)$ είναι ένα κάτω φράγμα.

Όμοια $f(-1)<f(1)\Leftrightarrow f(-1)f^2(1)<f^3(1)$ (πολλαπλασιάζουμε όλα τα μέλη με τον θετικό αριθμό $f^2(1)$),οπότε ο αριθμός $f^3(1)$ είναι ένα άνω φράγμα.

Επομένως έχουμε $f^3(-1) < f^2(-1)f(1) < 8 < f(-1)f^2(1) < f^3(1)$ δηλαδή

$f^3(-1) < 8 < f^3(1) \Leftrightarrow f(-1) < 2 < f(1)$

δ. $-1 < f^{-1}\left(\sqrt{|z|}\right) < 0 \Leftrightarrow f(-1) < \sqrt{|z|} < f(0) \Leftrightarrow f^2(-1) < |z| < f^2(1)$

Όμως $|z| = \mathrm{Re}(z)$ ή $|z| = 2\dfrac{f(-1)f(0)}{2}$ ή $|z| = f(0)f(-1)$

Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $f^2(-1) < f(0)f(-1) < f^2(0)$

Το οποίο ισχύει, διότι $f(-1) < f(0) \Leftrightarrow f^2(-1) < f(-1)f(0)$ και $f(-1) < f(0) \Leftrightarrow f(-1)f(0) < f^2(0)$

Θέμα 34ο.

Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2 και η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\int_2^0 -x|z_1xt+z_2|dt$ και για την οποία ισχύει $f(x)\geq x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι:

α. $f(x)=\int_0^{2x}|z_1t+z_2|dt$

β. $|z_2|=\dfrac{1}{2}$

γ. Η εξίσωση $f(x)=2013$ έχει ακριβώς μια λύση στο διάστημα $(0,+\infty)$.

δ. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $\int_0^x\left|z_1t+\dfrac{z_2}{2}\right|dt\geq\dfrac{x}{4}$

Λύση:

α. Έχουμε ότι $f(x)=\int_2^0 -x|z_1tx+z_2|dt$.

Θέτουμε $xt=u\Rightarrow xdt=du\Rightarrow dt=\dfrac{du}{x}$ και τα άκρα γίνονται: $\begin{cases}t=2\Rightarrow u=2x\\ t=0\Rightarrow u=0\end{cases}$

και έτσι

$$f(x)=\int_{2x}^0 -x|z_1u+z_2|\frac{du}{x}=\int_{2x}^0 -|z_1u+z_2|du=\int_0^{2x}|z_1u+z_2|du\overset{u\to t}{=}\int_0^{2x}|z_1t+z_2|dt$$

β. Για $x=0$ έχουμε ότι $f(0)=\int_0^0|z_1t+z_2|dt=0$

Θεωρώ $h(x)=f(x)-x$, οπότε $h(x)\geq 0$ για κάθε x, συνεπώς $h(x)\geq h(0)$ διότι $h(0)=f(0)-0=0$. Άρα από *θεώρημα Fermat*, το $h'(0)=0$, δηλαδή $f'(0)-1=0$.

Όμως $f'(x)=\left(\int_0^{2x}|z_1t+z_2|dt\right)'=|z_1 2x+z_2|\cdot(2x)'=2|z_1 2x+z_2|$, οπότε

$f'(0)=2|z_1 2\cdot 0+z_2|=2|z_2|$. Άρα $f'(0)-1=0\Rightarrow 2|z_2|-1=0\Rightarrow|z_2|=\dfrac{1}{2}$

γ. Έχουμε $f'(x)=2|z_1 2x+z_2|\geq 0$, άρα η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της, οπότε το σύνολο τιμών της θα είναι το διάστημα $\left(\lim\limits_{x\to 0^+}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$.

Έχουμε ότι : $f(x)\geq x$, οπότε:

- $f(x)\geq x\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\geq\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$

- $f(x) \geq x \Rightarrow \dfrac{f(x)}{x} \geq 1$ για κάθε $x > 0$, οπότε:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} \underset{\text{D.H}}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x)}{1} = \lim_{x \to 0^+} 2|z_1 2x + z_2| = 2|z_2| = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1, \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x \cdot 1) \Rightarrow \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

οπότε το σύνολο τιμών της θα είναι το διάστημα $(0, +\infty)$, που περιέχει το 2013, οπότε αφού η f είναι συνεχής, από *θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών*, θα υπάρχει ένα $x_0 \in (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 2013$. Όμως στο διάστημα αυτό η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα και "1−1", οπότε το x_0 αυτό είναι μοναδικό.

δ. Έχουμε ότι : $f(x) \geq x \Rightarrow \int_0^{2x} |z_1 t + z_2| dt \geq x$

Θέτουμε $\dfrac{t}{2} = u \Rightarrow dt = 2du$ και τα άκρα γίνονται: $\begin{cases} t = 2x \Rightarrow u = x \\ t = 0 \Rightarrow u = 0 \end{cases}$

και έτσι

$$\int_0^{2x} |z_1 t + z_2| dt \geq x \Rightarrow \int_0^{x} |z_1 2u + z_2| 2du \geq x \Rightarrow 4\int_0^{x} \left| z_1 u + \frac{z_2}{2} \right| du \geq x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^{x} \left| z_1 u + \frac{z_2}{2} \right| du \geq \frac{x}{4} \overset{u \to t}{\Rightarrow} \int_0^{x} \left| z_1 t + \frac{z_2}{2} \right| dt \geq \frac{x}{4}$$

Θέμα 35ο.

i. Να αποδείξετε την ανισότητα: $x-\frac{x^2}{2}\le \ln(1+x)\le x$ για κάθε $x\ge 0$.

Πότε ισχύουν οι ισότητες;

ii. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(1+x^2)$.

Αν Ε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$, τότε να δείξετε ότι $\frac{7}{30}<E<\frac{1}{3}$

(Study4exams)

Λύση:

i. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\ln(1+x)-x$ με $x>-1$.

Έχουμε $h'(x)=\left(\ln(1+x)\right)'-(x)'=\frac{1}{x+1}-1=\frac{-x}{x+1}$ οπότε σχηματίζουμε τον εξής πίνακα προσήμου:

x	-1		0		$+\infty$
h′(x)	‖	+	0	-	

Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$, οπότε για $x>0$ έπεται

$h(x)=\ln(1+x)-x<h(0)=0\Leftrightarrow \ln(1+x)<x$.

Άρα $\ln(1+x)\le x$ για κάθε $x\ge 0$ και η ισότητα ισχύει για $x=0$.

Ομοίως θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}$, $x>-1$. Η παράγωγός της είναι:

$g'(x)=\left(\ln(1+x)\right)'-\left(x-\frac{x^2}{2}\right)'=\frac{1}{x+1}-1+x=\frac{x^2}{x+1}$, $x>-1$, οπότε

x	-1		0		$+\infty$
g′(x)	‖	+	0	+	

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, οπότε για $x>0$ έπεται

$g(x)=\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}>g(0)=0$.

Άρα $\ln(1+x)>x-\frac{x^2}{2}$ για κάθε $x\ge 0$ και η ισότητα ισχύει για $x=0$.

ii. Με βάση το προηγούμενο ερώτημα ισχύει:

$$x-\frac{x^2}{2}\le \ln(1+x)\le x \overset{x\to x^2}{\Leftrightarrow} x^2-\frac{x^4}{2}\le \ln\left(1+x^2\right)\le x^2,\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R},\ (\text{αφού } x^2\ge 0)$$

άρα $x^2-\frac{x^4}{2}\le f(x)\le x^2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επίσης $1+x^2\ge 1$ άρα $f(x)=\ln\left(1+x^2\right)\ge \ln 1=0$, οπότε το εμβαδόν του χωρίου Ε που περικλείεται από τη C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$, ισούται με $E=\int_0^1 f(x)dx$.

Ολοκληρώνουμε τη σχέση $x^2-f(x)\ge 0$ και παίρνουμε:

$$\int_0^1\left(x^2-f(x)\right)dx>0\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx<\int_0^1 x^2dx\Leftrightarrow E<\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1\Leftrightarrow E<\frac{1}{3}$$

Η ανισότητα είναι γνήσια, γιατί η συνεχής συνάρτηση $x^2-f(x)$ δεν είναι παντού μηδέν.

Ομοίως ολοκληρώνοντας την ανισότητα $f(x)-x^2+\frac{x^4}{4}$ παίρνουμε:

$$\int_0^1\left(f(x)-x^2+\frac{x^4}{4}\right)dx>0\Leftrightarrow \int_0^1 f(x)dx>\int_0^1\left(x^2-\frac{x^4}{4}\right)dx\Leftrightarrow E>\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{10}\right]_0^1\Leftrightarrow E>\frac{7}{30}$$

Η ανισότητα και πάλι είναι γνήσια, γιατί η συνεχής συνάρτηση $f(x)-x^2+\frac{x^4}{4}$ δεν είναι παντού μηδέν.

Άρα $\frac{7}{30}<E<\frac{1}{3}$.

Θέμα 36ο.

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=2005$.

α. Να δείξετε ότι:

i. $f(0)=0$

ii. $f'(0)=1$.

β. Να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$ έτσι, ώστε: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\lambda(f(x))^2}{2x^2+(f(x))^2}=3$.

γ. Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και $f'(x)>f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι:

i. $xf(x)>0$ για κάθε $x\neq 0$.

ii. $\int_0^1 f(x)dx<f(1)$.

(Επαναληπτικές 2005)

Λύση:

α.i. : Επειδή η f είναι συνεχής στο 0, αρκεί να δείξουμε ότι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

Θέτουμε $\dfrac{f(x)-x}{x^2}=g(x)$ **(1)** , οπότε $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=2005$.

Λύνοντας τη σχέση ως προς f , έχουμε $f(x)=x^2g(x)+x$.

Το όριο στο δεύτερο μέλος υπάρχει, άρα $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x^2f(x)+x)=0\cdot 2005+0=0$.

ii. Από τη σχέση **(1)** για $x\neq 0$ προκύπτει $\dfrac{f(x)}{x}=xg(x)+1$.

Επομένως $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(xg(x)+1)=1$. Άρα $f'(0)=1$.

β. Εκμεταλλευόμαστε το προηγούμενο όριο, έχουμε:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+\lambda(f(x))^2}{2x^2+(f(x))^2}=3\Rightarrow\lim_{x\to 0}\frac{1+\lambda\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2}{2+\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2}=3\Rightarrow\frac{1+\lambda}{2+1}=3\Rightarrow\lambda=8$$

γ.i. Η σχέση που μας δίνεται γράφεται ισοδύναμα:

$$f'(x) > f(x) \Leftrightarrow f'(x) - f(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-x}f'(x) - e^{-x}f(x) > 0 \Leftrightarrow \left(e^{-x}f(x)\right)' > 0 .$$

Επομένως η συνάρτηση $h(x) = e^{-x}f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Άρα για $x > 0 \Rightarrow h(x) > h(0) = 0 \Rightarrow e^{-x}f(x) > 0 \Rightarrow f(x) > 0$. Επομένως $xf(x) > 0$.

Ομοίως για $x < 0 \Rightarrow h(x) < 0 \Rightarrow e^{-x}f(x) < 0 \Rightarrow f(x) < 0$, άρα $xf(x) > 0$.

ii. Έχουμε διαδοχικά:

$$f'(x) > f(x) \Rightarrow f'(x) - f(x) > 0 \Rightarrow \int_0^1 \left(f'(x) - f(x)\right)dx > 0 \Rightarrow \int_0^1 f'(x)dx - \int_0^1 f(x)dx > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_0^1 f'(x)dx > \int_0^1 f(x)dx \Rightarrow \left[f(x)\right]_0^1 > \int_0^1 f(x)dx \Rightarrow f(1) - f(0) > \int_0^1 f(x)dx \Rightarrow \int_0^1 f(x)dx < f(1)$$

Θέμα 37ο.

Δίνονται οι συναρτήσεις f,g οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο $(0,+\infty)$ και ισχύει :

- $f(1)=g(1)=f'(1)=g'(1)=0$
- $f'(x)=e^{g(x)}+1$ **(1)**
- $g'(x)=e^{f(x)}+1$ **(2)**

για κάθε $x>0$.

α. Να δείξετε ότι $f(x)=g(x)$ για κάθε $x>0$.

β. Να βρείτε τη συνάρτηση $h(x)=e^{-f(x)}+x$, $x>0$.

γ. Αν $\alpha>0$ και για κάθε $x>-1$ ισχύει : $h(x+1)\geq 3-\alpha^x$ **(*)** , να δείξετε ότι $\alpha=e^3$.

Λύση:

α. Η g είναι παραγωγίσιμη και η $e^{g(x)}$ παραγωγίσιμη επομένως και η $f'(x)$ είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα των παραγωγίσιμων $e^{g(x)}$ και της σταθερής συνάρτησης 1, με $f''(x)=e^{g(x)}g'(x)$ **(3)**.

Ομοίως g'(x) είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα των παραγωγίσιμων $e^{f(x)}$ και της σταθερής συνάρτησης 1 με $g''(x)=e^{f(x)}f'(x)$ **(4)**

(3) $\overset{(1)}{\Rightarrow} f''(x)=(f'(x)-1)g'(x)=f'(x)g'(x)-g'(x)\Rightarrow f'(x)g'(x)=f''(x)+g'(x)$ **(5)**

(4) $\overset{(2)}{\Rightarrow} g''(x)=(g'(x)-1)f'(x)=f'(x)g'(x)-f'(x)\Rightarrow f'(x)g'(x)=g''(x)+f'(x)$ **(6)**

Από τις **(5)** και **(6)** έχουμε : $f''(x)+g''(x)=g''(x)+f'(x)\Rightarrow (f''(x)+g'(x))=(g''(x)+f'(x))'\Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x)+g(x)=g'(x)+f(x)+c_1$.

Για $x=1$ προκύπτει $f'(1)+g(1)=g'(1)+f(1)+c_1\Leftrightarrow c_1=0$

Άρα $f'(x)+g(x)=g'(x)+f(x)\Rightarrow f'(x)-g'(x)=f(x)-g(x)\Rightarrow (f(x)-g(x))'=f(x)-g(x)$

Άρα $f(x)-g(x)=c\cdot e^x$.

Για x=1 προκύπτει $f(1)-g(1)=c\cdot e^1\Leftrightarrow c=0$. Επομένως $f(x)-g(x)=0\Leftrightarrow f(x)=g(x)$ για κάθε $x>0$.

β. $h(x)=e^{-f(x)}+x$. Η h είναι παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων με

$h'(x)=e^{-f(x)}(-f(x))'+1=e^{-f(x)}(-f'(x))+1=-e^{-f(x)}f'(x)+1=-e^{-f(x)}(e^{g(x)}+1)+1=$

$\overset{f(x)=g(x)}{=}-e^{-f(x)}(e^{f(x)}+1)+1=-1-e^{-f(x)}+1=-e^{-f(x)}=x-h(x)$

Άρα $h'(x)=x-h(x)\Leftrightarrow h'(x)+h(x)=x\Leftrightarrow e^x\cdot h'(x)+e^x\cdot h(x)=x\cdot e^x\Leftrightarrow$

$\Rightarrow \left(e^x \cdot h(x)\right)' = x \cdot e^x \Rightarrow \int \left(e^x \cdot h(x)\right)' dx = \int \left(x \cdot e^x\right) dx$ **(7)**

Αν θεωρήσω σαν $I = \int \left(x \cdot e^x\right) dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + c$

(7) $\Rightarrow$ $e^x \cdot h(x) = x \cdot e^x - e^x + c$

Για $x = 1$ έχουμε $h(1) = e^{-f(1)} + 1 = e^0 + 1 = 2$ και $e^1 \cdot h(1) = 1 \cdot e - e + c \Leftrightarrow c = 2e$

Άρα $e^x \cdot h(x) = x \cdot e^x - e^x + 2e \Rightarrow h(x) = x - 1 + 2e \cdot e^{-x} \Rightarrow h(x) = x - 1 + 2e^{1-x}$, $x > 0$.

γ. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = \alpha^x - 3 + h(x+1) = \alpha^x - 3 + x + 2e^{-x}$.

Τότε λόγω της **(*)** έχουμε ότι $\alpha^x - 3 - x + 2e^{-x} \geq 0$ για κάθε $x > -1$ ή $\varphi(x) \geq 0$ για κάθε $x > -1$.

Είναι $\varphi(0) = \alpha^0 - 3 - 0 + 2e^0 = 0$

Άρα $\varphi(x) \geq \varphi(0)$ για κάθε $x > -1$ οπότε η φ παρουσιάζει στο $x_0 = 0$ ελάχιστο.

Επειδή η φ είναι παραγωγίσιμη στο εσωτερικό σημείο $x_0 = 0$ από το *θεώρημα Fermat* θα ισχύει $\varphi'(0) = 0$

Επειδή $\varphi'(x) = \alpha^x \ln\alpha - 1 - 2e^{-x}$ θα έχουμε ότι

$\varphi'(0) = 0 \Rightarrow \alpha^0 \ln\alpha - 1 - 2e^0 = 0 \Rightarrow \ln\alpha - 1 - 2 = 0 \Rightarrow \ln\alpha = 3 \Rightarrow \alpha = e^3$

Θέμα 38ο.

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$ με $f(0)=1$ και $f'(0)=0$

α. Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β. Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\int_0^1 f(xt)dt+x^3}{\eta\mu^3 x}=+\infty$

Αν **επιπλέον** δίνεται ότι $f'(x)+2x=2x\cdot\left(f(x)+x^2\right)$, $x\in\mathbb{R}$, τότε:

γ. Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^{x^2}-x^2$, $x\in\mathbb{R}$

δ. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $h(x)=\int_x^{x+2} f(t)dt$, $x\geq 0$ και να λύσετε στο $\mathbb{R}$ την ανίσωση $\int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3} f(t)dt+\int_6^4 f(t)dt<0$

(Επαναληπτικές 2010)

Λύση

α. Εφόσον η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, η f' είναι γνησίως αύξουσα.

Άρα για $x>0\Rightarrow f'(x)>f'(0)\Rightarrow f'(x)>0$ και

για $x<0\Rightarrow f'(x)<f'(0)\Rightarrow f'(x)<0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	1	↗	

Επειδή η f είναι και συνεχής, θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$.

Συνεπώς για $x>0\Rightarrow f(x)>f(0)\Rightarrow f(x)>1$ και

για $x<0\Rightarrow f(x)>f(0)\Rightarrow f(x)>1$.

Επιπλέον ισχύει $f(0)=1$, άρα $f(x)\geq 1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β. Έστω $g(x)=\int_0^1 f(xt)dt$. Θέτουμε $xt=u$, οπότε $xdt=du\Leftrightarrow dt=\dfrac{du}{x}$ και για

$t=0$ έχουμε $u=0$, ενώ για $t=1$ έχουμε $u=x$.

Έτσι η συνάρτηση g γράφεται: $g(x)=\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du$ και το ζητούμενο όριο

γίνεται $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\frac{1}{x}\int_0^x f(u)du+x^3}{\eta\mu^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du+x^3}{\eta\mu^3 x}$

Επειδή η συνάρτηση $p(x)=\int_0^x f(u)du$ είναι παραγωγίσιμη, θα είναι και συνεχής, άρα

$\lim\limits_{x\to 0}p(x)=p(0)=0$. Έτσι το ζητούμενο όριο είναι απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\left(\int_0^x f(u)du+x^3\right)'=\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)+3x^2\right)=f(0)=1$ και

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\eta\mu^3 x\right)'=\lim\limits_{x\to 0}\left(3\eta\mu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)'=0$, με $3\eta\mu^2 x\cdot\sigma\upsilon\nu x>0$ κοντά στο 0,

οπότε $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)du+x^3}{\eta\mu^3 x}\overset{\text{DLH}}{\underset{x\to 0}{=}}\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+3x^2}{3\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu x}=\lim\limits_{x\to 0}\left(f(x)+3x^2\right)\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{3\eta\mu^2 x\sigma\upsilon\nu x}=+\infty$

γ. Έχουμε $f'(x)+2x=2x\cdot\left(f(x)+x^2\right)\Leftrightarrow\left(f(x)+x^2\right)'=2x\cdot\left(f(x)+x^2\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{\left(f(x)+x^2\right)'}{f(x)+x^2}=\left(x^2\right)'\Leftrightarrow\left(\ln\left(f(x)+x^2\right)\right)'=\left(x^2\right)'\Leftrightarrow\ln\left(f(x)+x^2\right)=x^2+c$

Για $x=0$ βρίσκουμε $\ln\left(f(0)+0^2\right)=0^2+c\Leftrightarrow\ln 1=c\Leftrightarrow c=0$,

άρα $\ln\left(f(x)+x^2\right)=x^2\Leftrightarrow f(x)+x^2=e^{x^2}\Leftrightarrow f(x)=e^{x^2}-x^2$.

δ. Έχουμε $h(x)=\int_x^{x+2}f(t)dt=\int_x^1 f(t)dt+\int_1^{x+2}f(t)dt=\int_1^{x+2}f(t)dt-\int_1^x f(t)dt$

Επειδή η f είναι συνεχής, η h είναι παραγωγίσιμη με $h'(x)=-f(x)+f(x+2)=f(x+2)-f(x)$.

Όμως $f'(x)=2x\left(e^{x^2}-1\right)>0$, για κάθε $x>0$ και f συνεχής, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Συνεπώς για $x<x+2\Rightarrow f(x)<f(x+2)$, άρα $h'(x)>0$ και h συνεχής, άρα γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Η ανίσωση τώρα γράφεται:

$\int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3}f(t)dt+\int_6^4 f(t)dt<0\Leftrightarrow\int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3}f(t)dt<-\int_6^4 f(t)dt\Leftrightarrow\int_{x^2+2x+1}^{x^2+2x+3}f(t)dt<\int_4^6 f(t)dt\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\int_{x^2+2x+1}^{(x^2+2x+1)+2}f(t)dt<\int_4^{4+2}f(t)dt\Leftrightarrow h\left(x^2+2x+1\right)<h(4)\Leftrightarrow x^2+2x+1<4\Leftrightarrow -3<x<1.$

Επειδή όμως η h ορίζεται για $x\geq 0$, έχουμε τελικά $0\leq x<1$.

Θέμα 39ο.

α. Δίνεται η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)\neq f(\beta)$. Να δείξετε ότι :

i. Υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$

ii. Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=\dfrac{2(\beta-\alpha)}{f(\beta)-f(\alpha)}$

β. Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\alpha+x\ln\left(\dfrac{e}{x}\right)$, $\alpha\in\mathbb{R}$, η οποία έχει τοπικό ακρότατο το $\dfrac{1}{2}$.

i. Να δείξετε ότι $\alpha=-\dfrac{1}{2}$.

ii. Για $\alpha=-\dfrac{1}{2}$ να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $(0,+\infty)$, μία στο $\left(\dfrac{1}{e^2},1\right)$ και μία στο διάστημα $(1,e^2)$.

Λύση

α.i. Αφού f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ άρα και συνεχής σε αυτό και $f(\alpha)\neq f(\beta)$ και χωρίς βλάβη της γενικότητας $f(\alpha)<f(\beta)$. Επίσης $f(\alpha)<\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}<f(\beta)$. Σύμφωνα με το *θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών* υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\dfrac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}$

ii. Εφαρμόζουμε το *Θεώρημα Μέσης Τιμής* στα διαστήματα $[\alpha,\xi]$ και $[\xi,\beta]$ αντίστοιχα, για την f.

- Στο διάστημα $[\alpha,\xi]$ ισχύουν προφανώς οι προϋποθέσεις του θεωρήματος άρα υπάρχει ένα

$\xi_1\in(\alpha,\xi)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_1)=\dfrac{f(\xi)-f(\alpha)}{\xi-\alpha}=\dfrac{\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}-f(\alpha)}{\xi-\alpha}=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{2(\xi-\alpha)}$

- Όμοια, στο διάστημα $[\xi,\beta]$ υπάρχει ένα

$\xi_2\in(\xi,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi_2)=f'(\xi_2)=\dfrac{f(\beta)-f(\xi)}{\beta-\xi}=\dfrac{f(\beta)-\frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2}}{\beta-\xi}=\dfrac{f(\beta)-f(\alpha)}{2(\beta-\xi)}$.

Επομένως $\dfrac{1}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=\dfrac{2\xi-2\alpha}{f(\beta)-f(\alpha)}+\dfrac{2\beta-2\xi}{f(\beta)-f(\alpha)}=\dfrac{2(\beta-\alpha)}{f(\beta)-f(\alpha)}$

β.i. Η $f(x)=\alpha+x\ln\left(\frac{e}{x}\right)$, $\alpha\in\mathbb{R}$ είναι ορισμένη στο διάστημα $(0,+\infty)$ και παραγωγίσιμη σ΄αυτό με

$$f'(x)=\ln\left(\frac{e}{x}\right)+x\frac{1}{\frac{e}{x}}\left(-\frac{e}{x^2}\right)=\ln\left(\frac{e}{x}\right)+\frac{x^2}{e}\left(-\frac{e}{x^2}\right)=\ln\left(\frac{e}{x}\right)-1,\ x>0.$$

Αφού η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο υπάρχει ένα $x_0>0$ εσωτερικό του $(0,+\infty)$ που σύμφωνα με *θεώρημα Fermat* θα έχουμε $f'(x_0)=0$ και $f(x_0)=\frac{1}{2}$.

- $f'(x_0)=0\Leftrightarrow\ln\left(\frac{e}{x_0}\right)-1=0\Leftrightarrow\ln\left(\frac{e}{x_0}\right)=\ln e\overset{\ln x''1-1'''}{\Leftrightarrow}\frac{e}{x_0}=e\Leftrightarrow x_0=1$
- $f(x_0)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow f(1)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\alpha+1\cdot\ln e=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\alpha=-\frac{1}{2}$

ii. Εξετάζοντας την μονοτονία της f βρίσκουμε

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖	↗	$\frac{1}{2}$	↘	

(Ολικό) μέγιστο το $f(1)=\frac{1}{2}$. Εφαρμόζοντας *θεώρημα Bolzano* για την συνεχή f στα διαστήματα $\left[\frac{1}{e^2},1\right]$, $\left[1,e^2\right]$, έχουμε:

- $f(1)=\frac{1}{2}>0$
- $f\left(\frac{1}{e^2}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{e^2}\ln\left(\frac{e}{\frac{1}{e^2}}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{e^2}\ln e^3=-\frac{1}{2}+\frac{3}{e^2}=\frac{6-e^2}{2e^2}<0$

Δηλ $f\left(\frac{1}{e^2}\right)\cdot f(1)<0$ άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in\left(\frac{1}{e^2},1\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_1)=0$ και αφού f γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ (άρα και στο $\left(\frac{1}{e^2},1\right)$) η ρίζα x_1 είναι μοναδική στο $(0,1)$.

Επίσης $f\left(e^2\right)=-\frac{1}{2}+e^2\ln\left(\frac{e}{e^2}\right)=-\frac{1}{2}-e^2<0$ και $f(1)=\frac{1}{2}>0$

Άρα $f\left(e^2\right)\cdot f(1)<0$, οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2\in\left(1,e^2\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=0$ και αφού η f γνησίως φθίνουσα στο $(1,+\infty)$ $(0,1)$ (άρα και στο $\left(1,e^2\right)$) οπότε η ρίζα x_2 είναι μοναδική στο $(1,+\infty)$

Τελικά η $f(x)=0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Θέμα 40ο.

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z , w , οι οποίοι ικανοποιούν τις σχέσεις:

- $\left|\dfrac{z}{\alpha^2}-i\right|=\dfrac{1}{\alpha}|z-i|$ **(1)**
- $w(z-i)-2zi-2\alpha^2=0$ **(2)** , όπου $\alpha\in\mathbb{R}$ και $0<\alpha\neq 1$

α. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z

β. Να αποδείξετε ότι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών w ανήκουν σε κύκλο, του οποίου να βρείτε το κέντρο και την ακτίνα.

γ. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $v=\dfrac{2z-w}{2z+w}$ με $w\neq -2z$, είναι φανταστικός

δ. Αν z_1,z_2 είναι δυο μιγαδικοί αριθμοί με εικόνες αντίστοιχα στο επίπεδο τα σημεία Α,Β, οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση **(1)** και w είναι ένας μιγαδικός αριθμός με εικόνα στο επίπεδο το σημείο Γ , ο οποίος ικανοποιεί τη σχέση **(2)**, τότε να αποδείξετε ότι: $\dfrac{1}{3}\le\dfrac{(\Gamma A)}{(\Gamma B)}\le 3$

(ΕΜΕ 2012)

Λύση

α. Είναι:

$$\left|\frac{z}{\alpha^2}-i\right|=\frac{1}{\alpha}|z-i|\Leftrightarrow|z-\alpha^2 i|=\alpha|z-i|\Leftrightarrow|z-\alpha^2 i|^2=\alpha^2|z-i|^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(z-\alpha^2 i)\left(\overline{z-\alpha^2 i}\right)=\alpha^2(z-i)\left(\overline{z-i}\right)\Leftrightarrow(z-\alpha^2 i)(\overline{z}+\alpha^2 i)=\alpha^2(z-i)(\overline{z}+i)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z\overline{z}+\alpha^2 zi-\alpha^2\overline{z}i-\alpha^4 i^2=\alpha^2 z\overline{z}+\alpha^2 zi-\alpha^2\overline{z}i-\alpha^2 i^2\Leftrightarrow|z|^2-\alpha^4 i^2=\alpha^2|z|^2-\alpha^2 i^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow|z|^2-\alpha^2|z|^2=\alpha^2-\alpha^4\Leftrightarrow(1-\alpha^2)|z|^2=(1-\alpha^2)\alpha^2\overset{0<\alpha\neq 1}{\Leftrightarrow}|z|^2=\alpha^2\Leftrightarrow|z|=\alpha \quad \textbf{(3)}$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=\alpha$.

β. Έχουμε: $w(z-i)-2zi-2\alpha^2=0\Leftrightarrow w(z-i)=2zi+2\alpha^2\overset{z\neq i}{\Leftrightarrow}w=\dfrac{2zi+2\alpha^2}{z-i}\overset{(3)}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow w=\frac{2zi+2|z|^2}{z-i}\Leftrightarrow w=\frac{2zi+2z\overline{z}}{z-i}\Leftrightarrow w=\frac{2z(\overline{z}+i)}{z-i} \quad \textbf{(4)}$$

Είναι $z\neq i$, γιατί αν $z=i$ από τη σχέση **(2)** προκύπτει $\alpha^2=1$ άτοπο.

Από τη σχέση **(4)** έχουμε:

$$|w|=\left|\frac{2z(\bar{z}+i)}{z-i}\right| \Leftrightarrow |w|=\frac{|2z(\bar{z}+i)|}{|z-i|} \Leftrightarrow |w|=\frac{2|z|\cdot|(\bar{z}+i)|}{|z-i|} \Leftrightarrow |w|=\frac{2|z|\cdot|\overline{z-i}|}{|z-i|} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |w|=\frac{2|z|\cdot|z-i|}{|z-i|} \Leftrightarrow |w|=2|z| \overset{(1)}{\Leftrightarrow} |w|=2\alpha \quad \textbf{(5)}$$

Άρα οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών w ανήκουν στον κύκλο, ο οποίος έχει κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $\rho=2\alpha$

γ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\bar{v}=-v$. Από τις σχέσεις **(3)** και **(5)** έχουμε:

- $|z|=\alpha^2 \Leftrightarrow z\bar{z}=\alpha^2 \Leftrightarrow \bar{z}=\dfrac{\alpha^2}{z}$
- $|w|=2\alpha \Leftrightarrow |w|^2=4\alpha^2 \Leftrightarrow w\bar{w}=4\alpha^2 \Leftrightarrow \bar{w}=\dfrac{4\alpha^2}{w}$

Είναι

$$\bar{v}=\left(\overline{\frac{2z-w}{2z+w}}\right)=\frac{\overline{2z-w}}{\overline{2z+w}}=\frac{2\bar{z}-\bar{w}}{2\bar{z}+\bar{w}}=\frac{2\dfrac{\alpha^2}{z}-\dfrac{4\alpha^2}{w}}{2\dfrac{\alpha^2}{z}+\dfrac{4\alpha^2}{w}}=\frac{2\alpha^2\left(\dfrac{1}{z}-\dfrac{2}{w}\right)}{2\alpha^2\left(\dfrac{1}{z}+\dfrac{2}{w}\right)}=$$

$$=\frac{\dfrac{1}{z}-\dfrac{2}{w}}{\dfrac{1}{z}+\dfrac{2}{w}}=\frac{\dfrac{w-2z}{zw}}{\dfrac{w+2z}{zw}}=\frac{w-2z}{w+2z}=-\frac{2z-w}{2z+w}=-v$$. Άρα ο αριθμός $v=\dfrac{2z-w}{2z+w}$ είναι φανταστικός

δ. Είναι $(\Gamma A)=|w-z_1|$ και $(\Gamma B)=|w-z_2|$

Για τους μιγαδικούς αριθμούς w, z_1 από τριγωνική ανισότητα έχουμε:

$$\big||w|-|z_1|\big| \le |w+z_1| \le |w|+|z_1| \quad \textbf{(6)}$$

Αν στη σχέση **(6)** θέσουμε, όπου z_1 το $-z_1$ έχουμε:

$$\big||w|-|-z_1|\big| \le |w+(-z_1)| \le |w|+|-z_1| \overset{|z_1|=|-z_1|}{\Leftrightarrow} \big||w|-|z_1|\big| \le |w-z_1| \le |w|+|z_1| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |2\alpha-\alpha| \le |w-z_1| \le 2\alpha+\alpha \Leftrightarrow \alpha \le (\Gamma A) \le 3\alpha \quad \textbf{(7)}$$

Ομοίως για τους μιγαδικούς αριθμούς w, z_2 έχουμε:

$\alpha \le |w-z_2| \le 3\alpha \Leftrightarrow \alpha \le (\Gamma B) \le 3\alpha$, οπότε $\dfrac{1}{3\alpha} \le \dfrac{1}{(\Gamma B)} \le \dfrac{1}{\alpha}$ (8)

Πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη τις σχέσεις **(7)** και **(8)** έχουμε: $\dfrac{\alpha}{3\alpha} \le \dfrac{(\Gamma A)}{(\Gamma B)} \le \dfrac{3\alpha}{\alpha} \Leftrightarrow \dfrac{1}{3} \le \dfrac{(\Gamma A)}{(\Gamma B)} \le 3$