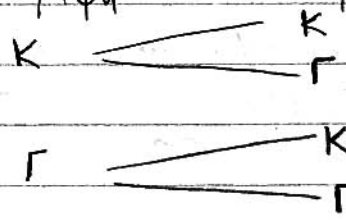
Επιμέλεια: Βασίλης Κράνιας

Επαναληπτικές ασκήσεις

1) α) 1η ρίψη 2η ρίψη



$\Omega = \{ ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ, ΓΓ \}$

β) $A = \{ ΚΚ, ΚΓ, ΓΚ \}$ $P(A) = \frac{3}{4}$

$B = \{ ΓΚ, ΓΓ \}$ $P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$Γ = \{ ΚΓ, ΓΚ \}$ $P(Γ) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$Δ = \{ ΚΚ, ΓΓ \}$ $P(Δ) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

2) i) $P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}$

ii) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{7} + \frac{1}{3} - \frac{4}{21} = \frac{6}{21} + \frac{7}{21} - \frac{4}{21} = \frac{9}{21}$

iii) $P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{9}{21} = \frac{12}{21}$

iv) $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{2}{7} - \frac{4}{21} = \frac{6}{21} - \frac{4}{21} = \frac{2}{21}$ ②

v) $P[(A-B) \cup (B-A)] = P(A-B) + P(B-A)$ ③

Η παραπάνω σχέση ισχύει διότι $A-B$, $B-A$ ασυμβίβαστα ενδεχόμενα

$P(B-A) = P(B) - P(B \cap A) = \frac{1}{3} - \frac{4}{21} = \frac{7}{21} - \frac{4}{21} = \frac{3}{21}$ ①

Άρα από ①②③ $P[(A-B) \cup (B-A)] = \frac{2}{21} + \frac{3}{21} = \frac{5}{21}$

Βασίλης Κράνιας

3) Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

M: "Ο μαθητής συμμετέχει στο διαγωνισμό της Μαθημ. Εταιρίας"

Φ: "Ο μαθητής συμμετέχει στο διαγωνισμό της Ένωσης Φυσικών"

Έτσι έχουμε $P(M)=\frac{24}{120}$ $P(\Phi)=\frac{20}{120}$ $P(M\cap\Phi)=\frac{12}{120}$

i) $P(M\cup\Phi)=P(M)+P(\Phi)-P(M\cap\Phi)=\frac{24}{120}+\frac{20}{120}-\frac{12}{120}=\frac{32}{120}$

ii) $P[(M-\Phi)\cup(\Phi-M)]=P(M-\Phi)+P(\Phi-M)=P(M)-P(M\cap\Phi)+P(\Phi)-P(\Phi\cap M)=$

$=\frac{24}{120}+\frac{20}{120}-2\cdot\frac{12}{120}=\frac{20}{120}$

iii) $P[(M\cup\Phi)']=1-P(M\cup\Phi)=1-\frac{32}{120}=\frac{88}{120}$

4)

$$A=\left(\frac{3x^2y}{2z^{-1}}\right)^3\cdot\left(\frac{-2xy^2}{5z^3}:\frac{6x^3\cdot y^{-1}\cdot z}{8y}\right)=\frac{3^3\cdot x^6y^3}{2^3\cdot z^{-3}}\cdot\left(\frac{-2xy^2}{5z^3}\cdot\frac{8y}{6x^3\cdot y^{-1}\cdot z}\right)=$$

$$=\frac{3^3\cdot x^6\cdot y^3}{2^3\cdot z^{-3}}\cdot\frac{-2\cdot 2^3\cdot xy^3}{5\cdot z^3\cdot 6\cdot x^3\cdot y^{-1}\cdot z}=-\frac{2\cdot 3^3\cdot x^7\cdot y^6}{5\cdot 6\cdot z^1x^3\cdot y^{-1}}=-\frac{3^2}{5}x^4\cdot y^7\cdot z^{-1}$$

Έτσι έχουμε για $x=-10^2$, $y=(2\cdot 3^2)^{-1}$, $z=2\cdot 10^3$

$$A=-\frac{9}{5}\cdot(-10^2)^4\cdot\left((2\cdot 3^2)^{-1}\right)^7\cdot(2\cdot 10^3)^{-1}=-\frac{9}{5}\cdot 10^8\cdot(2^{-1}\cdot 3^{-2})^7\cdot 2^{-1}\cdot 10^{-3}=$$

$$=-\frac{9}{5}10^8\cdot 2^{-7}\cdot 3^{-14}\cdot 2^{-1}\cdot 10^{-3}=-\frac{3^2}{5}\cdot 10^5\cdot 2^{-8}\cdot 3^{-14}=-\frac{10^5\cdot 2^{-8}\cdot 3^{-12}}{5}$$

$$=-\frac{2^5\cdot 5^5\cdot 2^{-8}\cdot 3^{12}}{5}=-5^4\cdot 2^{-3}\cdot 3^{-12}$$

5) α) $(\kappa-\lambda)\cdot\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\kappa}\right) \geq -4 \Leftrightarrow \frac{\kappa}{\lambda}-\frac{\kappa}{\kappa}-\frac{\lambda}{\lambda}+\frac{\lambda}{\kappa} \geq -4 \Leftrightarrow$

$\frac{\kappa}{\lambda}+\frac{\lambda}{\kappa} \geq -4+2 \overset{\kappa\cdot\lambda>0}{\Leftrightarrow} \kappa^2+\lambda^2 \geq -2\kappa\lambda \Leftrightarrow \kappa^2+\lambda^2+2\kappa\lambda \geq 0 \Leftrightarrow$

$(\kappa+\lambda)^2 \geq 0$ ισχύει

β) Αν $-\beta<\alpha<1$ ① έχουμε: $\alpha-\beta\alpha+\beta>\alpha^2 \Leftrightarrow \alpha-\beta\alpha+\beta-\alpha^2>0 \Leftrightarrow$

$\alpha+\beta-\alpha(\alpha+\beta)>0 \Leftrightarrow (\alpha+\beta)\cdot(1-\alpha)>0$. ισχύει διότι από ① έχουμε $\alpha+\beta>0$ και $1-\alpha>0$

γ) $\frac{2^{160}}{3^{120}}=\frac{\left(2^4\right)^{40}}{\left(3^3\right)^{40}}=\left(\frac{2^4}{3^3}\right)^{40}=\left(\frac{16}{27}\right)^{40}<1$

διότι αφού $\frac{16}{27}<1 \Rightarrow \left(\frac{16}{27}\right)^{40}<1^{40}=1$

έτσι έχουμε $\frac{2^{160}}{3^{120}}<1 \Rightarrow 2^{160}<3^{120}$

6) α) $\left|1-\frac{\mu}{\nu}\right|<\left|1-\frac{\nu}{\mu}\right| \Leftrightarrow \left|\frac{\nu-\mu}{\nu}\right|<\left|\frac{\mu-\nu}{\mu}\right| \Leftrightarrow$

$\frac{|\nu-\mu|}{|\nu|}<\frac{|\mu-\nu|}{|\mu|} \Leftrightarrow \frac{|\nu-\mu|}{|\nu|}<\frac{|\nu-\mu|}{|\mu|} \overset{\nu-\mu\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{1}{|\nu|}<\frac{1}{|\mu|} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\nu|>|\mu|$ που ισχύει αφού $\nu>\mu$ άρα $|\nu|>|\mu|$.

β) $|x|\leq 5 \Leftrightarrow -5\leq x\leq 5 \overset{\cdot 2}{\Rightarrow} -10\leq 2x\leq 10$

$|y|\leq 3 \Leftrightarrow -3\leq y\leq 3 \overset{\cdot 7}{\Rightarrow} -21\leq 7y\leq 21$

$-31\leq 2x+7y\leq 31$

άρα $|2x+7y|\leq 31$

$$\text{г)}\quad a\cdot|b|-b\cdot|a|=0 \iff a|b|=b\cdot|a| \overset{a,b\neq 0}{\iff} \frac{a}{b}=\frac{|a|}{|b|} \iff$$

$$\frac{a}{b}=\left|\frac{a}{b}\right| \iff \frac{a}{b}>0 \iff a\cdot b>0.$$

$$7)\quad A=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{175}}{\sqrt{28}+\sqrt{112}}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{7\cdot 25}}{\sqrt{4\cdot 7}+\sqrt{7\cdot 16}}=\frac{\sqrt{7}+5\sqrt{7}}{2\sqrt{7}+4\sqrt{7}}=\frac{6\sqrt{7}}{6\sqrt{7}}=1$$

$$B=\frac{5}{\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}-\frac{2}{3+\sqrt{7}}=\frac{5}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}\cdot\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}-$$

$$-\frac{2}{3+\sqrt{7}}\cdot\frac{3-\sqrt{7}}{3-\sqrt{7}}=\frac{5\sqrt{5}}{5}-\frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{5})^2}-\frac{2(3-\sqrt{7})}{3^2-(\sqrt{7})^2}=$$

$$=\sqrt{5}-\frac{2(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{2}-\frac{2(3-\sqrt{7})}{2}=\sqrt{5}-\sqrt{7}-\sqrt{5}-3+\sqrt{7}=-3$$

$$\Gamma=\sqrt{5+2\sqrt{6}}-\sqrt{7-2\sqrt{6}}=\sqrt{(\sqrt{2})^2+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2}-\sqrt{(\sqrt{6})^2-2\sqrt{6}\cdot 1+1^2}$$

$$=\sqrt{(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2}-\sqrt{(\sqrt{6}-1)^2}=|\sqrt{2}+\sqrt{3}|-|\sqrt{6}-1|=\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}+1$$

$$8)\ \text{а)}\quad \sqrt[7]{\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{3}}=\sqrt[7]{\sqrt[3]{3\cdot 3^3}}=\sqrt[2\cdot 7\cdot 3]{3^4}=\sqrt[21]{3^2}$$

$$\text{в)}\quad \sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[6]{27}\cdot\sqrt[8]{9^4}=\sqrt[3\cdot 8]{9^8}\cdot\sqrt[6\cdot 4]{27^4}\cdot\sqrt[8\cdot 3]{9^{4\cdot 3}}=\sqrt[24]{3^{16}}\cdot\sqrt[24]{3^{12}}\cdot\sqrt[24]{3^{24}}$$

$$\sqrt[24]{3^{16+12+24}}=\sqrt[24]{3^{24}\cdot 3^{24}\cdot 3^4}=3\cdot 3\cdot\sqrt[24]{3^4}=9\cdot\sqrt[6]{3}$$

$$\text{г)}\quad \sqrt{a^3\cdot\sqrt[4]{b^2\sqrt[3]{b^2a^4}}}=\sqrt{a^3\sqrt[4]{\sqrt[3]{b^2\cdot a^4\cdot(b^2)^3}}}=\sqrt{a^3\sqrt[12]{b^2\cdot b^6\cdot a^4}}=$$

$$=\sqrt{\sqrt[12]{b^8\cdot a^4\cdot(a^3)^{12}}}=\sqrt{\sqrt[24]{b^8\cdot a^4\cdot a^{36}}}=\sqrt{\sqrt[24]{b^8\cdot a^{40}}}=\sqrt[3\cdot 8]{(a^5\cdot b)^8}=\sqrt[3]{a^5\cdot b}$$

9) α) $|x-7| = 2x+1$

x	$-\infty$		7		$+\infty$
$x-7$		$-$	0	$+$	

i) Αν $x \in (-\infty, 7]$ τότε έχουμε $-(x-7) = 2x+1 \Leftrightarrow -x+7 = 2x+1 \Leftrightarrow$
$-3x = -6 \Leftrightarrow \boxed{x = 2}$ δεκτή

ii) Αν $x \in (7, +\infty)$ τότε: $x-7 = 2x+1 \Leftrightarrow 2x-x = -7-1 \Leftrightarrow$
$x = -8$ απορρίπτεται.

β) $(2x-1)^4 = 81 \Leftrightarrow 2x-1 = \pm\sqrt[4]{81} \Leftrightarrow 2x-1 = \pm 3$

$2x-1 = 3$ ή $2x-1 = -3$

$2x = 4$ ή $2x = -2$

$\boxed{x = 2}$ ή $\boxed{x = -1}$

γ) $|x+2| + |x-1| = 2|3x-1|$

$x+2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$

$x-1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$3x-1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

x	$-\infty$		-2		$1/3$		1		$+\infty$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$		$+$			
$x-1$	$-$		$-$	$-$		$-$	0	$+$	
$3x-1$	$-$		$-$	$-$	0	$+$		$+$	

i) Αν $x \in (-\infty, -2]$ τότε: $-x-2-x+1 = -2(3x-1) \Leftrightarrow -2x-1 = -6x+2 \Leftrightarrow$
$4x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$ απορρίπτεται

ii) Αν $x \in (-2, \frac{1}{3}]$ τότε: $x+2-x+1 = -2(3x-1) \Leftrightarrow 3 = -6x+2 \Leftrightarrow$
$6x = -1 \Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{1}{6}}$ δεκτή

iii) Αν $x \in (\frac{1}{3}, 1]$ τότε: $x+2-x+1 = 2(3x-1) \Leftrightarrow 3 = 6x-2 \Leftrightarrow$
$6x = 5 \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{5}{6}}$ δεκτή

iv) Αν $x \in (1, +\infty)$ τότε: $x+2+x-1 = 2(3x-1) \Leftrightarrow 2x+1 = 6x-2 \Leftrightarrow$
$4x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$ απορρίπτεται.

δ) $x^4+1 = 0 \Leftrightarrow x^4 = -1$ αδύνατη

Βασίλης Κράνιας

ε) $(x-2)^7 - 8\cdot(x-2)^4 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^4\cdot[(x-2)^3 - 8] = 0 \Leftrightarrow$

$(x-2)^4 = 0$ ή $(x-2)^3 - 8 = 0$.

$x-2=0$ ή $(x-2)^3 = 8$

$\boxed{x=2}$ ή $x-2 = \sqrt[3]{8}$

ή $x-2 = 2$

$\boxed{x=4}$

10) Στην εκφώνηση της άσκησης υπήρχε λάθος: $\lambda \neq -1$ (όχι $\lambda \neq 1$)

$a = \lambda+1$

$b = -2(\lambda-1)$ $\quad \Delta = [-2(\lambda-1)]^2 - 4\cdot(\lambda+1)\cdot\lambda = 4\cdot(\lambda^2-2\lambda+1) - 4\lambda^2 - 4\lambda =$

$\gamma = \lambda$ $\quad 4\lambda^2 - 8\lambda + 4 - 4\lambda^2 - 4\lambda = -12\lambda + 4$

α) για να έχει ρίζες ίσες πρέπει: $\Delta = 0 \Leftrightarrow -12\lambda+4=0 \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}}$

β) για να έχει ρίζες άνισες πρέπει: $\Delta > 0 \Leftrightarrow -12\lambda+4>0 \Leftrightarrow$

$12\lambda < 4 \Leftrightarrow \lambda < \frac{4}{12}$ ή $\lambda < \frac{1}{3}$ όμως $\lambda \neq -1$ άρα $\boxed{\lambda \in (-\infty,-1)\cup(-1,\frac{1}{3})}$

δ) για να μην έχει ρίζες πρέπει: $\Delta < 0 \Leftrightarrow -12\lambda+4<0 \Leftrightarrow$

$12\lambda > 4 \Leftrightarrow \lambda > \frac{1}{3}$ ή $\lambda \in (\frac{1}{3}, +\infty)$

γ) ρίζες πραγματικές πρέπει: $\Delta \geq 0$ άρα $\lambda \in (-\infty,-1)\cup(-1,\frac{1}{3}]$

11) α) $f(x) = \dfrac{x-1}{|2x-1|-5}$ πρέπει $|2x-1|-5 \neq 0 \Leftrightarrow |2x-1| \neq 5$

$2x-1 \neq 5$ ή $2x-1 \neq -5$

$2x \neq 6$ ή $2x \neq -4$

$A = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$ $\quad x \neq 3$ ή $x \neq -2$

β) $f(x) = \sqrt{\dfrac{-x^2+4x+5}{(x-2)\cdot(x^2-6x+9)}}$ πρέπει $(x-2)\cdot(x^2-6x+9) \neq 0$ και

$\dfrac{-x^2+4x+5}{(x-2)\cdot(x^2-6x+9)} \geq 0$.

$(x-2)\cdot(x^2-6x+9) = 0 \Leftrightarrow (x-2)\cdot(x-3)^2 = 0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=3$

$$\frac{-x^2+4x+5}{(x-2)\cdot(x^2-6x+9)} \geq 0 \Leftrightarrow \underbrace{(-x^2+4x+5)\cdot(x-2)\cdot(x-3)^2}_{P(x)} \geq 0$$

$-x^2+4x+5=0 \quad \Delta = 16+20=36 \quad x_{1,2} = \frac{-4\pm 6}{-2} = \begin{cases} -1 \\ 5 \end{cases}$

x	$-\infty$		-1		2		3		5		$+\infty$
$-x^2+4x+5$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(x-3)^2$		$+$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$		$+$		$+$	0	$-$	

Άρα $A=(-\infty,-1]\cup(2,3)\cup(3,5]$

γ) $f(x)=\sqrt{|x+3|-2}$ πρέπει $|x+3|-2\geq 0 \Leftrightarrow |x+3|\geq 2$

$x+3\geq 2$ ή $x+3\leq -2$

$x\geq -1$ ή $x\leq -5$

Άρα $A=(-\infty,-5]\cup[-1,+\infty)$

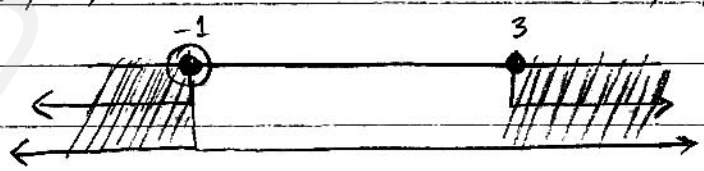
δ) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-2x-3}-x}{\sqrt{x^2+2x+1}}$ πρέπει $x^2-2x-3\geq 0$ και $x^2+2x+1>0$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
x^2-2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x\in(-\infty,-1]\cup[3,+\infty)$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
x^2+2x+1		$+$	0	$+$	

$x\in(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$



Έχει $A=(-\infty,-1)\cup[3,+\infty)$

ε) $f(x)=\frac{3-2x}{|3x-4|-|x|}$ πρέπει $|3x-4|-|x|\neq 0 \Leftrightarrow$

$|3x-4|\neq|x| \Leftrightarrow$

$3x-4\neq x$ ή $3x-4\neq -x$

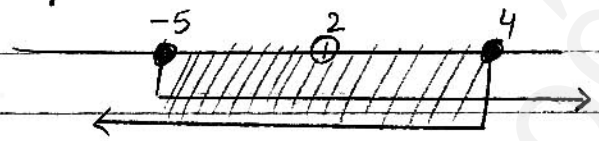
$2x\neq 4$ ή $4x\neq 4$

$x\neq 2$ ή $x\neq 1$

Έτσι $A=\mathbb{R}-\{1,2\}$

ζ) $f(x)=\frac{\sqrt{x+5}}{x-2}-\sqrt{4-x}$ πρέπει $x+5\geq 0$ και $x-2\neq 0$ και $4-x\geq 0$

Έτσι έχουμε: $x\geq -5$ και $x\neq 2$ και $x\leq 4$



$A=[-5,2)\cup(2,4]$

12). α) $A=\mathbb{R}$

β) $f(-1)=3(-1)-1=-4$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=3\cdot\frac{1}{2}-1=\frac{3}{2}-\frac{2}{2}=\frac{1}{2}$

$f(5)=0$.

$f(2)=-2+3=1$.

13) α) $A_f=[-2,6]$, $A_g=[-2,6]$

β) $f(A_f)=[-1,3]$ $g(A_g)=[1,2]$

γ) $f(x)=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=4$.

δ) $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x=1$ ή $x=5$

ε) $f(x)>0 \Leftrightarrow x\in[-2,2)\cup(4,6]$

ζ) $f(x)>g(x) \Leftrightarrow x\in[-2,1)\cup(5,6]$

η) $0<f(x)<g(x) \Leftrightarrow x\in(1,2)\cup(4,5)$

θ) $f(6)=3$, $g(-2)=1$

Βασίλης Κραβάρας

14) α) $f(x) = |2x-7| + a$

Το σημείο του γ'γ είναι το $(0,4)$ άρα

$4 = |2 \cdot 0 - 7| + a \Leftrightarrow 4 = 7 + a \Leftrightarrow \boxed{a = -3}$.

β) πρέπει $f(x) > 0 \Leftrightarrow |2x-7| - 3 > 0 \Leftrightarrow |2x-7| > 3 \Leftrightarrow$

$2x - 7 > 3$ ή $2x - 7 < -3$

$2x > 10$ ή $2x < 4$

$x > 5$ ή $x < 2$

Βασίλης Κράνιας