

Θέμα 1ο

①

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad A &= (2x+3)^2 - 2(3x-4)(3x+4) + (4x-3)^2 - 40 = \\ &= 4x^2 + 12x + 9 - 2(9x^2 - 4^2) + 16x^2 - 24x + 9 - 40 = \\ &= \underline{4x^2} + \underline{12x} + \underline{9} - \underline{18x^2} + \underline{32} + \underline{16x^2} - \underline{24x} + \underline{9} - \underline{40} \\ &= 2x^2 - 12x + 10 = 2(x^2 - 6x + 5) = 2(x-1)(x-5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II)} \quad B &= x^3 - 7x^2 - 25x + 175 = \underline{x^3 - 7x^2} - \underline{25x + 175} = x^2(x-7) - 25(x-7) = \\ &= (x-7)(x^2 - 25) = (x-7)(x-5)(x+5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{A}{B} &= \frac{3x^2 - 15x + 75}{x^3 + 125} = \frac{2(x-1)(x-5)}{(x-7)(x-5)(x+5)} \cdot \frac{x^3 + 5^3}{3(x^2 - 5x + 25)} = \\ &= \frac{2(x-1)}{(x-7)(x+5)} \cdot \frac{(x+5)(x^2 - 5x + 25)}{3(x^2 - 5x + 25)} = \frac{2(x-1)}{3(x-7)} \end{aligned}$$

Θέμα 2ο

$$\begin{aligned} \text{I)} \quad A &= (2x+3y)^2 - 9(y-x)(y+x) - 6x(2y+x-7) = \\ &= 4x^2 + 12xy + 9y^2 - 9(y^2 - x^2) - 12xy - 6x^2 + 42x = \\ &= \underline{4x^2} + \underline{12xy} + \underline{9y^2} - \underline{9y^2} + \underline{9x^2} - \underline{12xy} - \underline{6x^2} + \underline{42x} \\ &= 7x^2 + 42x \end{aligned}$$

$$\text{II)} \quad \frac{A}{x^2 + 7x + 6} = \frac{7x(x+6)}{(x+1)(x+6)} = \frac{7x}{x+1}$$

$$\text{III)} \quad A=0 \quad \wedge \quad 7x^2 + 42x = 0 \quad \wedge \quad 7x(x+6) = 0$$

$$\begin{aligned} 7x &= 0 \quad \wedge \quad x+6 = 0 \\ \boxed{x=0} &\quad \wedge \quad \boxed{x=-6} \end{aligned}$$

Θέμα 3^ο

(2)

I) $P(x) = ax^3 + (b-1)x^2 - 3x - 2b + 6$
 $P(1) = 0 \quad \text{ή} \quad a \cdot 1^3 + (b-1) \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 - 2b + 6 = 0 \quad \text{ή} \quad a + b - 1 - 3 - 2b + 6 = 0.$

$$a - b + 2 = 0$$

$$P(-1) = 0 \quad \text{ή} \quad a \cdot (-1)^3 + (b-1) \cdot (-1)^2 - 3 \cdot (-1) - 2b + 6 = 0$$

$$-a + b - 1 + 3 - 2b + 6 = 0 \quad \text{ή} \quad -a - b + 8 = 0.$$

$$\begin{cases} a - b = -2 \\ a + b = 8 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} 2a = 6 \\ a - b = -2 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} a = 3 \\ a + 2 = b \end{cases} \quad \text{ή} \quad \begin{cases} a = 3 \\ b = 5 \end{cases}$$

II) Για $a=3$ και $b=5$ έχουμε:

A. $P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 3x - 10 + 6 = 3x^3 + 4x^2 - 3x - 4 = 3x(x^2 - 1) + 4(x^2 - 1) =$
 $= (x^2 - 1)(3x + 4) = (x - 1)(x + 1) \cdot (3x + 4)$

B. $3x^3 + 4x^2 = 3x + 4 \quad \text{ή} \quad 3x^3 + 4x^2 - 3x - 4 = 0 \quad \text{ή} \quad (x - 1)(x + 1) \cdot (3x + 4) = 0$

$$x - 1 = 0 \quad \text{ή} \quad x + 1 = 0 \quad \text{ή} \quad 3x + 4 = 0$$

$$\boxed{x = 1} \quad \text{ή} \quad \boxed{x = -1} \quad \text{ή} \quad \boxed{x = -\frac{4}{3}}$$

Θέμα 4^ο

I) $6x^2 - 7x + 2 = 0$

$$a = 6$$

$$b = -7$$

$$\gamma = 2$$

$$\Delta = b^2 - 4a\gamma = (-7)^2 - 4 \cdot 6 \cdot 2 = 49 - 48 = 1$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7 \pm 1}{12} = \begin{cases} x_1 = \frac{8}{12} = \frac{2}{3} \\ x_2 = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Επομένως έχουμε: $6x^2 - 7x + 2 = 6 \cdot (x - \frac{2}{3}) \cdot (x - \frac{1}{2}) = (3x - 2) \cdot (2x - 1)$

II) $\frac{4x^2(2x-3) - (2x-3)}{x \cdot (6x^2 - 7x + 2)} = \frac{(2x-3)(4x^2-1)}{x \cdot (3x-2)(2x-1)} = \frac{(2x-3)\cancel{(2x-1)}(2x+1)}{x \cdot (3x-2)\cancel{(2x-1)}}$

Θέμα 4ο

$$\text{III)} \quad \frac{x-1}{3x^2-2x} + \frac{x+1}{2x^2-x} = \frac{-x-1}{x(6x^2-7x+2)}$$

$$(x \neq 0 \quad x \neq \frac{2}{3} \quad x \neq \frac{1}{2})$$

$$\frac{x-1}{x(3x-2)} + \frac{x+1}{x(2x-1)} = -\frac{x+1}{x \cdot (3x-2)(2x-1)}$$

$$\cancel{x(3x-2)(2x-1)} \frac{x-1}{\cancel{x(3x-2)}} + \cancel{x(3x-2)(2x-1)} \frac{x+1}{\cancel{x(2x-1)}} = -\cancel{x(3x-2)(2x-1)} \cdot \frac{x+1}{\cancel{x(3x-2)(2x-1)}}$$

$$(2x-1)(x-1) + (3x-2)(x+1) = -(x+1)$$

$$\underline{2x^2} - \underline{2x} - \underline{x} + \underline{1} + \underline{3x^2} + \underline{3x} - \underline{2x} - \underline{2} + \underline{x} + \underline{1} = 0$$

$$5x^2 - x = 0$$

$$x \cdot (5x-1) = 0$$

$$x=0 \quad \vee \quad 5x-1=0$$

$$\text{απορρίπτεται} \quad \vee \quad \boxed{x = \frac{1}{5}}$$

Θέμα 5ο

I)

$$K = \frac{x^2}{x+4} + \frac{5x^2-16x-16}{x^2-16} =$$

$$\text{πρέπει} \quad x+4 \neq 0 \quad \vee \quad \boxed{x \neq -4}$$

$$x-4 \neq 0 \quad \vee \quad \boxed{x \neq 4}$$

$$= \frac{x^2}{x+4} + \frac{5x^2-16x-16}{(x-4)(x+4)}$$

$$A = \frac{xy^2+6xy+9x}{y^2+4y+3} : \frac{ax}{ay+a} = \frac{x(y^2+6y+9)}{(y+1)(y+3)} : \frac{ax}{a(y+1)}$$

$$\text{πρέπει} \quad y+1 \neq 0 \quad \vee \quad y \neq -1$$

$$y+3 \neq 0 \quad \vee \quad y \neq -3$$

$$\text{II) } K = \frac{\frac{x-4}{x^2}}{x+4} + \frac{\frac{1}{5x^2-16x-16}}{(x-4)(x+4)} = \frac{x^3-4x^2}{(x-4)(x+4)} + \frac{5x^2-16x-16}{(x-4)(x+4)} = \textcircled{4}$$

$$= \frac{x^3+x^2-16x-16}{(x-4)(x+4)} = \frac{x^2(x+1)-16(x+1)}{(x-4)(x+4)} = \frac{(x+1)(x-4)(x+4)}{(x-4)(x+4)} = x+1$$

$$1 = \frac{x(y^2+6y+9)}{(y+1)(y+3)} \cdot \frac{\cancel{a(y+1)}}{\cancel{ax}} = \frac{\cancel{x}(y+3)^2}{(y+3) \cdot \cancel{x}} = y+3$$

$$\text{III) } \begin{cases} k+1=9 \\ \frac{k}{3} + \frac{1}{2} = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} k+1=9 \\ 6\frac{k}{3} + 6\frac{1}{2} = 6 \cdot 4 \end{cases} \quad \begin{cases} k+1=9 \\ 2k+31=24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+1+y+3=9 \\ 2(x+1)+3(y+3)=24 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=9-4 \\ 2x+2+3y+9=24 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+3y=24-11 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=5 \cdot (-2) \\ 2x+3y=13 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x-2y=-10 \\ 2x+3y=13 \\ \hline y=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=3 \\ x+y=5 \end{cases} \quad \begin{cases} y=3 \\ x=5-y \end{cases} \quad \begin{cases} y=3 \\ x=5-3=2 \end{cases}$$

Apa $(x,y) = (2,3)$

Ορίστε 6ο

$$\begin{cases} \frac{a+1}{3} + \frac{b+2}{2} = 0 \\ \frac{2a+1}{5} - \frac{b}{4} = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6 \cdot \frac{a+1}{3} + 6 \cdot \frac{b+2}{2} = 0 \quad (5) \\ 20 \cdot \frac{2a+1}{5} - 20 \cdot \frac{b}{4} = 20 \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2(a+1) + 3(b+2) = 0 \\ 4(2a+1) - 5b = 40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a+2+3b+6=0 \\ 8a+4-5b=40 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a+3b=-8 \quad (\cdot 4) \\ 8a-5b=36 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -8a-12b=32 \\ 8a-5b=36 \\ \hline -17b=68 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = -\frac{68}{17} = -4 \\ 2a+3b=-8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=-4 \\ 2a+3 \cdot (-4) = -8 \end{cases} \quad \begin{cases} b=-4 \\ 2a-12=-8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=-4 \\ 2a=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=-4 \\ a=2 \end{cases}$$

Άρα $(a,b) = (2,-4)$

II) Για την ευθεία $y=ax+b$ με $(a,b)=(2,-4)$ έχουμε:

① $y=2x-4$

Για να βρούμε τα σημεία A, B που τέμνει η ευθεία τους άξονες $x'x$ και $y'y$

φτιάχνουμε τον πίνακα τιμών:

x	0	...
y	...	0

Έτσι, όταν $y=0$ από την εξίσωση ① έχουμε $0=2x-4$ ή

$$2x=4 \quad \text{ή} \quad \boxed{x=2}$$

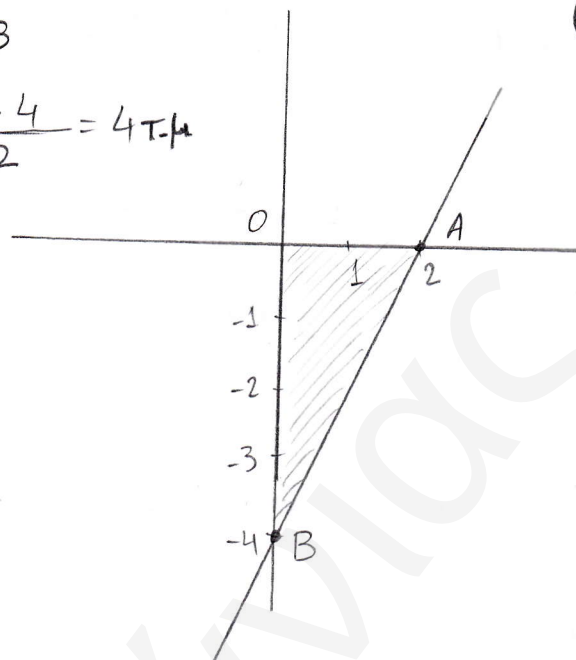
Όταν $x=0$ αντίστοιχα έχουμε $y=2 \cdot 0 - 4$ ή

$$\boxed{y=-4}$$

Άρα $A(2,0)$ και $B(0,-4)$

6

Για το εμβαδόν του τριγώνου $\triangle OAB$
 έχουμε $(OAB) = \frac{b \cdot u}{2} = \frac{(OA) \cdot (OB)}{2} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4 \text{ τ.μ}$



Θέμα 7ο

I) Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle ABA$, $\triangle EZ\theta$

1) $AB = EZ$ (υπόθεση)

2) $AA = E\theta$ (υπόθεση)

Επειδή από το κριτήριο ισόζυγας ορθογώνιων τριγώνων
 (2 αντίστοιχες πλευρές ίσες για προς για) είναι ίσα.

II) Όμοια για τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle A\Delta\Gamma$, $\triangle E\theta H$ έχουμε:

1) $A\Delta = E\theta$ (υπόθεση)

2) $A\Gamma = EH$ (υπόθεση)

Επειδή τα τρίγωνα είναι ίσα σύμφωνα με το προηγούμενο κριτήριο.

III) Επειδή $\triangle ABA = \triangle EZ\theta$ θα έχουν τα αντίστοιχα γωνιολόγια τους
 ίσα. Άρα $\hat{B} = \hat{Z}$ και $B\Delta = Z\theta$.

Επειδή συγκρίνοντας τα τρίγωνα $\triangle A\hat{B}\Gamma$, $\triangle E\hat{Z}H$ έχουμε

1) $AB = EZ$ (υπόθ)

2) $\hat{B} = \hat{Z}$ (προηγ. σύγκριση)

3) $B\Gamma = ZH$ (από το ίδιο ισών τρίγωνων)

$$\begin{array}{l} B\Delta = Z\theta \\ A\Gamma = \theta H \\ B\Gamma = ZH \end{array}$$

Π-Γ-Π

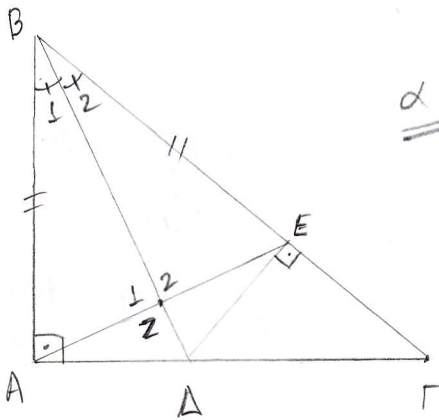
τα τρίγωνα
είναι ίσα

I) Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle B\hat{A}\Delta$, $\triangle B\hat{E}\Delta$

1) $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ (BA διχοτόμος)

2) BΔ κοινή πλευρά

Αρα σύμφωνα με το κριτήριο ισότητας ορθογώνιων τριγώνων (μία αντίστοιχη πλευρά ίση και μία αντίστοιχη οξεία γωνία ίση) τα τρίγωνα είναι ίσα. Έτσι θα έχουμε $AB = BE$



α τρόπος

Πράγματι το τρίγωνο $\triangle ABE$ είναι ισοσκελές και η BΔ είναι διχοτόμος, άρα θα είναι ταυτόχρονα και ύψος.
(σύμφωνα με την εφαρμογή 1 βελ 191 Β.Μ.)
Αρα BΔ κάθετη στην ΑΕ.

β τρόπος Συγκρίνουμε τα τρίγωνα $\triangle ABZ$, $\triangle ZBE$

1) $AB = BE$ (προν. επίλυση)

2) $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ (BΔ διχοτόμος)

3) BZ κοινή πλευρά

} από το κριτήριο
π-γ-π τα
τρίγωνα είναι
ίσα

Έτσι τα αντίστοιχα στοιχεία τους θα είναι ίσα. Αρα $\hat{Z}_1 = \hat{Z}_2$. Οι γωνίες αυτές όμως είναι παραπληρωματικές (αθροιστά 180°)

Αρα $\hat{Z}_1 = \hat{Z}_2 = 90^\circ$ Δηλαδή BΔ κάθετη στην ΑΕ

Θέμα 9^ο

(8)

I) Τα τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle \Delta E\Gamma$ είναι όμοια γιατί έχουν δύο ίσες γωνίες αφού: $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$
 $\hat{\Gamma}$ κοινή γωνία

II) Σχηματίζουμε τους λόγους των αντίστοιχων πλευρών: $\triangle AB\Gamma$
 $\triangle \Delta E\Gamma$

$$\frac{A\Gamma}{\Delta\Gamma} = \frac{\Gamma B}{\Gamma E} = \frac{AB}{\Delta E}$$

$$\frac{A\Gamma}{5} = \frac{8}{\Gamma E} = \frac{4}{\Delta E}$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{5} = \frac{8}{\Gamma E}$$

$$\Gamma E \cdot 4\sqrt{3} = 5 \cdot 8, \quad \Gamma E = \frac{40}{4\sqrt{3}} = \frac{10}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{4\sqrt{3}}{5} = \frac{4}{\Delta E} \quad \text{ή} \quad \Delta E \cdot 4\sqrt{3} = 4 \cdot 5 \quad \text{ή} \quad \Delta E = \frac{20}{4\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Άρα} \quad \boxed{\Delta E = \frac{5\sqrt{3}}{3}}$$

$$\text{III)} \quad \epsilon\psi B = \frac{A\Gamma}{AB} = \frac{4\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$$

$$\text{Άρα} \quad B = 60^\circ$$

Οεμα 10^ο

(9)

$$\text{I)} \quad \eta \mu^2 \omega = \frac{\left(\frac{\eta \mu \omega}{6 \omega \omega}\right)^2}{1 + \left(\frac{\eta \mu \omega}{6 \omega \omega}\right)^2} \quad \text{ή} \quad \eta \mu^2 \omega = \frac{\frac{\eta \mu^2 \omega}{6 \omega^2 \omega}}{1 + \frac{\eta \mu^2 \omega}{6 \omega^2 \omega}} \quad \text{ή}$$

$$\eta \mu^2 \omega = \frac{\frac{\eta \mu^2 \omega}{6 \omega^2 \omega}}{\frac{6 \omega^2 \omega + \eta \mu^2 \omega}{6 \omega^2 \omega}} \quad \text{ή} \quad \eta \mu^2 \omega = \frac{\frac{\eta \mu^2 \omega}{6 \omega^2 \omega}}{\frac{1}{6 \omega^2 \omega}} \quad \text{ή}$$

$$\eta \mu^2 \omega = \frac{\eta \mu^2 \omega \cdot 6 \omega^2 \omega}{6 \omega^2 \omega} \quad \text{ή} \quad \eta \mu^2 \omega = \eta \mu^2 \omega \quad \text{παι 16xύει.}$$

$$\text{II)} \quad \text{Από το επίλυση I)} \quad \text{έχουμε} \quad \eta \mu^2 \omega = \frac{(-0,75)^2}{1 + (-0,75)^2} =$$

$$= \frac{\left(-\frac{3}{4}\right)^2}{1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{\frac{9}{16}}{1 + \frac{9}{16}} = \frac{\frac{9}{16}}{\frac{16+9}{16}} = \frac{9 \cdot 16}{25 \cdot 16} = \frac{9}{25}$$

Αρα $\eta \mu \omega = \pm \sqrt{\frac{9}{25}}$ ή

$\eta \mu \omega = \pm \frac{3}{5}$ όπως 16xύει ότι $90^\circ < x < 180^\circ$

Οπότε $\boxed{\eta \mu \omega = \frac{3}{5}}$

Επίσης 16xύει ότι: $\eta \mu^2 \omega + 6 \omega^2 \omega = 1$ ή $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 6 \omega^2 \omega = 1$ ή

$6 \omega^2 \omega = 1 - \frac{9}{25}$ ή $6 \omega^2 \omega = \frac{25-9}{25}$ ή $6 \omega^2 \omega = \frac{16}{25}$ ή $6 \omega^2 \omega = \pm \sqrt{\frac{16}{25}}$

$6 \omega^2 \omega = \pm \frac{4}{5}$ για την γωνία όπως 16xύει ότι $6 \omega \omega < 0$

Αρα $\boxed{6 \omega \omega = -\frac{4}{5}}$